TRA CỨU NHANH PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÁC DẠNG TOÁN
(Sưu tầm và biên soạn)

TH.S NGUYỄN VŨ MINH (FB: Nguyễn Vũ Minh)
BÙI LÊ HOÀNG NGHĨA (FB: Hoàng Nghĩa Bùi Lê)

Ngày 20 tháng 9 năm 2016

Mục lục

Chương 1

Dao động cơ học

1.1 Dao động điều hòa

1.1.1 Khi gặp bài toán cho biết phương trình phụ thuộc thời gian của x, v, a, F, $\mathbf{W_t}$ và $\mathbf{W_đ}$ để tìm các đại lượng khác

Phương pháp:

Đối chiếu với phương trình tổng quát để xác định các đại lượng mà bài toán yêu cầu:

$$
\begin{aligned}
&x = A\cos(\omega t + \varphi) \\
&v = x' = -\omega A\sin(\omega t + \varphi) \\
&a = v' = -\omega^2 A\cos(\omega t + \varphi) \\
&F = ma - m\omega^2 A\cos(\omega t + \varphi) \\
&W_t = \frac{kx^2}{2} = \frac{m\omega^2 A^2}{2}\cos^2(\omega t + \varphi) = \frac{m\omega^2 A^2}{4}\left[1 + \cos(2\omega t + 2\varphi)\right] \\
&W_d = \frac{mv^2}{2} = \frac{m\omega^2 A^2}{2}\sin^2(\omega t + \varphi) = \frac{m\omega^2 A^2}{4}\left[1 - \cos(2\omega t + 2\varphi)\right] \\
&W = W_t + W_d = \frac{m\omega^2 A^2}{2} = \frac{kA^2}{2}
\end{aligned}
$$

Chú ý

- Khi $v > 0$, $a > 0$: vận tốc, gia tốc có cùng chiều dương (hướng theo chiều dương).
- Khi $v < 0$, $a < 0$: vận tốc, gia tốc có cùng chiều âm (hướng theo chiều âm).

1.1.2 Bài toán liên quan đến viết phương trình dao động

Phương pháp

- Thực chất của việc viết phương trình dao động điều hòa là xác định các đại lượng A,ω,

φ trong các biểu thức $\begin{cases} x = A\cos(\omega t + \varphi) \\ v = x' = -\omega A \sin(\omega t + \varphi) \end{cases}$

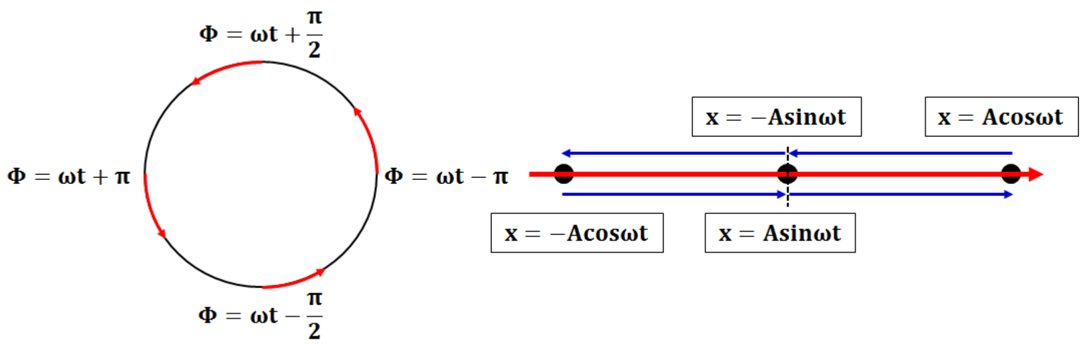
- Để xác định ω, căn cứ vào các công thức có liên quan đến ω ở trên và mối liên hệ giữa ω với f và T: $\omega = 2\pi f = \dfrac{2\pi}{T} = \sqrt{\dfrac{k}{m}} = \sqrt{\dfrac{g}{l}}$
- Nếu trong khoảng thời gian Δt, vật thực hiện được n dao động thì chu kì dao động là: $T = \dfrac{\Delta t}{n}$
- Để xác định A thì căn cứ vào công thức có liên quan đến đại lượng này như:

$$A = \sqrt{x^2 + \frac{v^2}{\omega^2}} = \frac{v_{\max}}{\omega} = \frac{a_{\max}}{\omega^2} = \frac{l_{\max} - l_{\min}}{2}$$

- Để xác định φ cần dựa vào phương trình li độ và vận tốc ở thời điểm ban đầu: $t = 0$: $\begin{cases} x|_{t=0} = x_0 \\ v|_{t=0} = v_0 \end{cases} \xrightarrow{t=0} \begin{cases} x_0 = A\cos\varphi \\ v_0 = -\omega A \sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \varphi$

Chú ý

1. Vật đi theo chiều dương thì $v > 0$, đi theo chiều âm thì $v < 0$.
2. Bốn trường hợp đặc biệt nên nhớ. Khi chọn gốc thời gian là lúc: Vật ở biên dương, vật qua qua vị trí cân bằng theo chiều âm, vật ở biên âm và vật qua vị trí cân bằng theo chiều dương thì phương trình có dạng như hình vẽ:



1.1.3 Khi gặp bài toán liên quan đến phương trình độc lập với thời gian

Phương pháp:

Sử dụng linh hoạt công thức

$$x^2 + \frac{v^2}{\omega^2} = A^2;\ a = -\omega^2 x;\ F = -m\omega^2 x = -kx;\ k = m\omega^2$$
$$W = W_t + W_d = \frac{kx^2}{2} + \frac{mv^2}{2} = \frac{m\omega^2 A^2}{2} = \frac{kA^2}{2}$$

1.1.4 Khi gặp các bài đơn giản cho x tính v hoặc cho v tính x

Phương pháp:

Từ các công thức:

$$\begin{cases} A^2 = x^2 + \dfrac{v^2}{\omega^2} \\ v_{\min} = \omega A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |v| = \omega\sqrt{A^2 - x^2} \\ |x| = A\sqrt{1 - \left(\dfrac{v}{\omega A}\right)^2} \end{cases}$$

Ta suy ra các điểm đặc biệt:

$$|x| = 0 \Leftrightarrow |v| = \omega A$$
$$|x| = \frac{A}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow |v| = \frac{\omega A}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow W_d = W_t$$
$$|x| = A \Leftrightarrow |v| = 0$$
$$|x| = \frac{A\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow |v| = \frac{\omega A}{2} \Leftrightarrow W_t = 3W_d$$
$$|x| = \frac{A}{2} \Leftrightarrow |v| = \frac{\omega A\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow W_d = 3W_t$$

1.1.5 Khi gặp các bài toán liên quan đến tốc độ chuyển động tròn đều và tốc độ dao động điều hòa

Phương pháp:

Kinh nghiệm cho thấy, những bài toán không liên quan đến hướng của dao động điều hòa hoặc liên quan vận tốc và gia tốc thì nên giải bằng cách sử dụng phương trình; còn nếu liên quan đến hướng thì khi sử dụng vòng tròn lượng giác sẽ cho lời giải ngắn gọn.

Ta đã biết, hình chiếu của chuyển động tròn đều trên một trục nằm trong mặt phẳng quỹ đạo biểu diễn một dao động điều hòa: $x = A\cos(\omega t + \varphi)$. Ở nửa trên vòng tròn thì hình chiếu đi theo chiều âm, còn ở dưới thì đi theo chiều dương.

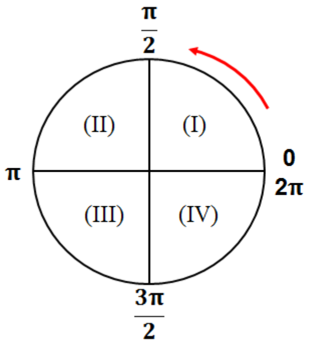
$$x = A\cos(\omega t + \varphi) \equiv \text{Hình chiếu CĐTĐ} \begin{cases} \text{Bán kính} = A \\ \text{Tốc độ góc} = \omega \\ \text{Tốc độ dài:} v_{\max} = \omega A \end{cases}$$

$$x^2 + \frac{v^2}{\omega^2} = A^2 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{v}{\omega A}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{v}{v_{\max}}\right)^2 = 1$$

1.1.6 Tìm khoảng thời gian để vectơ vận tốc và gia tốc cùng chiều, ngược chiều

Phương pháp:

Viết phương trình dưới dạng: $x = A\cos(\omega t + \varphi)$ thì $\Phi = (\omega t + \varphi)$. Chú ý rằng, $\vec{v}$ luôn cùng hướng với hướng chuyển động, $\vec{a}$ luôn hướng về vị trí cân bằng.



$\begin{cases} \mathbf{a < 0} \\ \mathbf{v > 0} \end{cases} \Rightarrow$ **Vật đi từ x = A đến x = 0 → $0 < \Phi < \frac{\pi}{2}$**

$\begin{cases} \mathbf{a > 0} \\ \mathbf{v < 0} \end{cases} \Rightarrow$ **Vật đi từ x = 0 đến x = - A → $\frac{\pi}{2} < \Phi < \pi$**

$\begin{cases} \mathbf{a > 0} \\ \mathbf{v > 0} \end{cases} \Rightarrow$ **Vật đi từ x = - A đến x = 0 → $\pi < \Phi < \frac{3\pi}{2}$**

$\begin{cases} \mathbf{a < 0} \\ \mathbf{v < 0} \end{cases} \Rightarrow$ **Vật đi từ x = 0 đến x = A → $\frac{3\pi}{2} < \Phi < 2\pi$**

Vật chuyển động về vị trí cân bằng là nhanh dần (không đều) và chuyển động ra xa vị trí cân bằng là chậm dần (không đều)

1.1.7 Tìm li độ và hướng chuyển động ở thời điểm t_0

Phương pháp:

- **Cách 1:**

$$\begin{cases} x = A\cos(\omega t + \varphi) \\ v = x' = -\omega A\sin(\omega t + \varphi) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_{(t_0)} = A\cos(\omega t_0 + \varphi) \\ v_{(t_0)} = -\omega A\sin(\omega t_0 + \varphi) \end{cases}$$

$v_{(t_0)} > 0$: vật đi theo chiều dương (x đang tăng); $v_{(t_0)} < 0$: vật đi theo chiều âm(x đang giảm)

- **Cách 2:**
  - Xác định vị trí trên vòng tròn lượng giác vị trí t_0: $\Phi_{(t_0)} = \omega t_0 + \varphi$.
  - Nếu thuộc nửa trên vòng tròn lượng giác thì hình chiếu chuyển động theo chiều âm (x đang giảm)
  - Nếu thuộc nửa dưới vòng tròn lượng giác thì hình chiếu chuyển động theo chiều dương (x đang tăng)
  - Li độ dao động điều hòa: $x = A\cos\Phi_{(t_0)}$.
  - Vận tốc dao động điều hòa: $v = -\omega A\sin\Phi_{(t_0)}$.

1.1.8 Tìm trạng thái quá khứ và tương lai đối với bài toán chưa cho biết phương trình của x, v, a, F ...

Phương pháp:

1. Chọn mốc thời gian $t = t_0 = 0$ và dùng vòng tròn lượng giác để viết pha dao động: $\Phi = \omega t + \varphi$.
2. Lần lượt thay $t = -\Delta t$ và $t = +\Delta t$ để tìm trạng thái quá khứ và tương lai:

$$\Phi = \omega t + \varphi \Rightarrow \begin{cases} x = A\cos\Phi \\ v = -\omega A\sin\Phi \end{cases}$$

$v > 0$: vật đi theo chiều dương (x đang tăng); $v < 0$: vật đi theo chiều âm(x đang giảm).

1.1.9 Tìm trạng thái quá khứ và tương lai đối với bài toán cho biết phương trình của x, v, a, F ...

Phương pháp:

Cách 1: Giải phương trình lượng giác.

Các bước giải bài toán tìm li độ, vận tốc dao động sau (trước) thời điểm t trong khoảng thời gian Δt. Biết tại thời điểm t vật có li độ: $x = x_1$.

- Từ phương trình: $x = A\cos(\omega t + \varphi)$ cho $x = x_1$. Lấy nghiệm $\omega t + \varphi = \alpha$ ứng với x đang giảm (vật chuyển động theo chiều âm vì $v < 0$) hoặc $\omega t + \varphi = -\alpha$ ứng với x đang tăng (vật chuyển động theo chiều dương vì $v > 0$) với $0 \leq \alpha = \arccos\left(\dfrac{x_1}{A}\right) \leq \pi$

- Li độ và vận tốc dao động của vật sau (trước) thời điểm đó Δt giây là:

$$\begin{cases} x = A\cos\left(\pm\omega\Delta t + \alpha\right) \\ v = -\omega A\sin\left(\pm\omega\Delta t + \alpha\right) \end{cases} \text{hoặc} \begin{cases} x = A\cos\left(\pm\omega\Delta t - \alpha\right) \\ v = -\omega A\sin\left(\pm\omega\Delta t - \alpha\right) \end{cases}$$

Quy trình giải nhanh với máy tính cầm tay

♣ Li độ và vận tốc sau thời điểm t một khoảng thời gian Δt lần lượt bấm như sau:

$$\begin{cases} x = A\cos\left(\omega\Delta t \pm \text{shift}\cos\left(x_1 \div A\right)\right) \\ v = -\omega A\sin\left(\omega\Delta t \pm \text{shift}\cos\left(x_1 \div A\right)\right) \end{cases}$$

♣ Li độ và vận tốc trước thời điểm t một khoảng thời gian Δt lần lượt bấm như sau:

$$\begin{cases} x = A\cos\left(-\omega\Delta t \pm \text{shift}\cos\left(x_1 \div A\right)\right) \\ v = -\omega A\sin\left(-\omega\Delta t \pm \text{shift}\cos\left(x_1 \div A\right)\right) \end{cases}$$

Lấy dấu cộng trước **shift** $\mathbf{cos(x_1 \div A)}$ nếu ở thời điểm t li độ đang giảm (đi theo chiều âm) và lấy dấu trừ nếu li độ đang tăng (đi theo chiều dương)

Cách 2: Dùng vòng tròn lượng giác.

- Dựa vào trạng thái ở thời điểm t_0 để xác định vị trí tương ứng trên vòng tròn lượng giác.
- Để tìm trạng thái ở thời điểm $(t_0 - \Delta t)$, ta quét theo chiều âm một góc $\Delta\varphi = \omega\Delta t$.
- Để tìm trạng thái ở thời điểm $(t_0 + \Delta t)$, ta quét theo chiều dương một góc $\Delta\varphi = \omega\Delta t$.

Kinh nghiệm:

1. Chọn lại gốc thời gian trùng với trạng thái đã biết, tức là viết lại pha dao động $\Phi = \omega t + \varphi$. Từ đó ta tìm được trạng thái quá khứ và tương lai: $\begin{cases} x = A\cos\Phi \\ v = -\omega A\sin\Phi \end{cases}$
2. Đối với bài toán liên quan đến chiều tăng, giảm (chiều dương, chiều âm) thì nên dùng vòng tròn lượng giác. Đối với bài toán không liên quan đến chiều tăng, giảm thì nên dùng phương trình lượng giác.
3. Các bài toán cho biết cả li độ và vận tốc thì cũng nên dùng phương trình lượng giác

1.1.10 Bài toán liên quan đến hai thời điểm cách nhau $\mathbf{t_2 - t_1 = nT}$, $\mathbf{t_2 - t_1 = (2n+1)\frac{T}{2}}$ và $\mathbf{t_2 - t_1 = (2n+1)\frac{T}{4}}$

Phương pháp

1. Hai thời điểm cách nhau một khoảng thời gian $t_2 - t_1 = nT$ (gọi là hai thời điểm cùng pha) thì $x_2 = x_1$; $v_2 = v_1$; $a_2 = a_1, \ldots$
2. Hai thời điểm cách nhau một khoảng thời gian $t_2 - t_1 = (2n+1)\frac{T}{2}$ (gọi là hai thời điểm ngược pha) thì $x_2 = -x_1$; $v_2 = -v_1$; $a_2 = -a_1, \ldots$
3. Hai thời điểm cách nhau một khoảng thời gian $t_2 - t_1 = (2n+1)\frac{T}{4}$ (gọi là hai thời điểm vuông pha) thì $x_1^2 + x_2^2 = A^2$; $v_1^2 + v_2^2 = v_{\max}^2$; $a_1^2 + a_2^2 = a_{\max}^2$; $|v_2| = |\omega x_1|$; $|v_1| = |\omega x_2|$ (khi n lẻ thì $v_2 = \omega x_1$; $v_1 = -\omega x_2$ và khi n chẳn thì $v_2 = -\omega x_1$; $v_1 = \omega x_2$)

1.1.11 Tìm số lần đi qua một vị trí nhất định trong một khoảng thời gian

Phương pháp:

Cách 1: Giải phương trình lượng giác

Các bước giả bài toán tìm số lần vật đi qua vị trí đã biết x (hoặc v, a, W_t, W_d, F) từ thời điểm t_1 đến t_2.

- Giải phương trình lượng giác thu được các nghiệm.
- Từ $t_1 \le t \le t_2 \Rightarrow$ Phạm vị giá trị của $k \in \mathbb{Z}$.
- Tổng số giá trị của k là số lần vật đi qua vị trí đó.

Lưu ý:

★ Trong mỗi chu kì, vật qua vị trí biên 1 lần, các vị trí khác 2 lần.

★ Mỗi một chu kì, vật đạt vận tốc $\vec{v}$ hai lần ở 2 vị trí đối xứng nhau qua vị trí cân bằng và đạt tốc độ v bốn lần, mỗi vị trí 2 lần do đi theo 2 chiều âm dương.

★ Đối với gia tốc thì kết quả như li độ.

★ Nếu $t = t_1$ tính từ vị trí khảo sát thì cả quá trình được công thêm một lần đi qua li độ đó, vận tốc đó.

Cách 2: Dùng đồ thị

- Dựa vào phương trình dao động vẽ đồ thị x (hoặc v, a, W_t, W_d, F) theo thời gian.
- Xác định số giao điểm của đồ thị với đường thẳng $x = x_0$ trong khoảng thời gian từ t_1 đến t_2.

Cách 3: Dùng vòng tròn lượng giác

- Viết phương trình dưới dạng hàm cos: $x = A\cos(\omega t + \varphi)$; $\Phi = \omega t + \varphi$.
- Xác định vị trí xuất phát.
- Xác định góc quét $\Delta\Phi = \omega\Delta t = n.2\pi + \pi + \Delta\varphi$ (n là số nguyên)
- Qua điểm x kẻ đường vuông góc với Ox sẽ cắt vòng tròn tại hai điểm (một điểm ở nửa trên vòng tròn có hình chiếu đi theo chiều âm và điểm còn lại có hình chiếu đi theo chiều dương).
- Đếm số lần quét qua điểm cần tìm.

Kinh nghiệm

1. Đối với hình thức trắc nghiệm thì nên rèn luyện cách 3.
2. Để tránh sai sót không đáng có. nếu bài toán cho phương trình dưới dạng sin thì t đổi về dạng cos: $x = A\sin(\omega t + \varphi) = A\cos\left(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right)$.
3. Đối với bài toán liên quan đến v, a, F, W_t, W_d thì dựa vào công thức độc lập với thời gian để quy về x.

1.1.12 Viết phương trình dao động điều hòa

Thực chất viết phương trình dao động điều hòa là xác định các đại lượng A, ω và φ của phương trình: $x = A\cos(\omega t + \varphi)$.

Cách 1:

$$\begin{cases} \omega = 2\pi f = \dfrac{2\pi}{T} = \sqrt{\dfrac{k}{m}} = \sqrt{\dfrac{g}{l}} \\ A = \sqrt{x^2 + \dfrac{v^2}{\omega^2}} = \dfrac{v_{\max}}{\omega} = \dfrac{a_{\max}}{\omega^2} = \sqrt{\dfrac{2W}{k}} = \dfrac{S_{(T/2)}}{2} = \dfrac{S_{(T)}}{4} = \dfrac{\text{Chiều dài quỹ đạo}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = A\cos(\omega t + \varphi) \\ v = -\omega A\sin(\omega t + \varphi) \end{cases} \xrightarrow{t=0} \begin{cases} x_{(0)} = A\cos\varphi \\ v_{(0)} = -\omega A\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = ? \\ \varphi = ? \end{cases}$$

Cách 2: Dùng máy tính bỏ túi

Cơ sở:

$$\begin{cases} x = A\cos(\omega t + \varphi) \\ v = -\omega A\sin(\omega t + \varphi) \end{cases} \xrightarrow{t=0} \begin{cases} x_0 = A\cos\varphi \\ v_0 = -\omega A\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = A\cos\varphi = a \\ -\dfrac{v_0}{\omega} = A\sin\varphi = b \end{cases}$$

Một dao động điều hòa $x = A\cos(\omega t + \varphi)$ có thể biểu diễn bằng một số phức: $\overline{x} = A\angle\varphi = Ae^{i\varphi} = A\cos\varphi + i.A\sin\varphi = a + bi$. Do đó: $\overline{x} = x_0 - \dfrac{v_0}{\omega}i = A\angle\varphi \Leftrightarrow x = A\cos(\omega t + \varphi)$

Thao tác bấm máy:

Bấm $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{2}$	Màn hình hiện **CMPLX**
Bấm $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{4}$	Màn hiện hiện chữ **R**

Bấm nhập: $\overline{x} = x_0 - \dfrac{v_0}{\omega}i$

Bấm $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{=}$ màn hình hiện $A\angle\varphi$

Cách 3: Dùng vòng tròn lượng giác

*** Quy trình giải nhanh:**

1. Để viết phương trình dao động dạng hàm cos khi biết x_0, v_0 và ω, ta nhập vào máy tính:

$$x_0 - \frac{v_0}{\omega}i \xrightarrow{\text{SHIFT 2 3}} A\angle\varphi \Leftrightarrow x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

2. Để viết phương trình dao động dạng hàm sin khi biết x_0, v_0 và ω, ta nhập vào máy tính:

$$x_0 + \frac{v_0}{\omega}i \xrightarrow{\text{SHIFT 2 3}} A\angle\varphi \Leftrightarrow x = A\sin(\omega t + \varphi)$$

Lúc $t = 0$, nếu vật qua vị trí cân bằng theo chiều dương thì $x_0 = 0$ và $v_0 = \omega A$

Lúc $t = 0$, nếu vật qua vị trí cân bằng theo chiều âm thì $x_0 = 0$ và $v_0 = -\omega A$

Lúc $t = 0$, nếu vật qua vị trí biên dương thì $x_0 = +A$ và $v_0 = 0$

Lúc $t = 0$, nếu vật qua vị trí biên âm thì $x_0 = -A$ và $v_0 = 0$

Chú ý: Với bài toán có số liệu không tường minh thì không nên dùng phương pháp số phức.

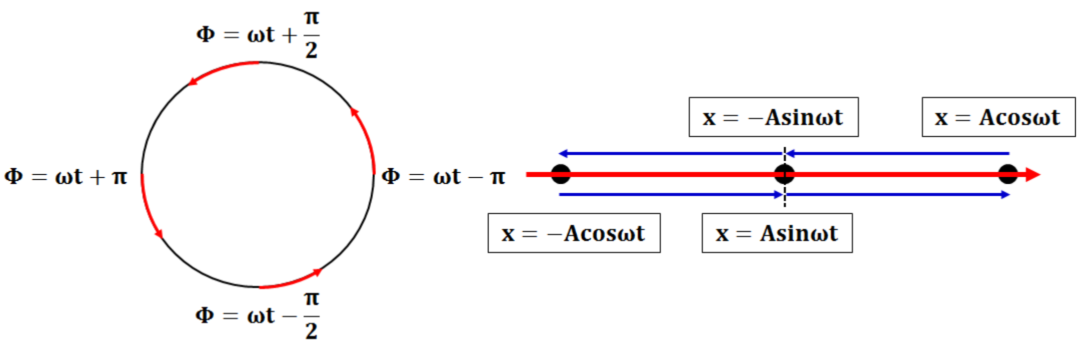
Nhận xét: Đối với hình thức thi trắc nghiệm, gặp bài toán viết phương trình điều hòa dao động nên khai thác thế mạnh của vòng tròn lượng giác vá chú ý loại trừ trong 4 phương án (vì vậy có thể không dùng đến một vài số liệu của bài toán). Bốn trường hợp đặc biệt cần nhớ:

1. Nếu chọn gốc thời gian là lúc vật ở biên dương ($x = A$) thì pha dao động và phương trình li độ lần lượt là: $\begin{cases} \Phi = \omega t \\ x = A\cos\omega t = A\sin\left(\omega t + \dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}$

2. Nếu chọn gốc thời gian là lúc vật qua vị trí cân bằng theo chiều âm thì pha dao động và phương trình li độ lần lượt là: $\begin{cases} \Phi = \omega t + \dfrac{\pi}{2} \\ x = A\cos\left(\omega t + \dfrac{\pi}{2}\right) = -A\sin\omega t \end{cases}$

3. Nếu chọn gốc thời gian là lúc vật ở biên am6 ($x = A$) thì pha dao động và phương trình li độ lần lượt là: $\begin{cases} \Phi = \omega t + \pi \\ x = A\cos(\omega t + \pi) = -A\cos\omega t = A\sin\left(\omega t - \dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}$

4. Nếu chọn gốc thời gian là lúc vật qua vị trí cân bằng theo chiều dương thì pha dao động và phương trình li độ lần lượt là: $\begin{cases} \Phi = \omega t - \dfrac{\pi}{2} \\ x = A\cos\left(\omega t - \dfrac{\pi}{2}\right) = A\sin\omega t \end{cases}$



1.1.13 Cho biết W, v_0, a_0, tìm ω, φ

Phương pháp:

Ta tính ωA rồi đến ω, φ theo quy trình như sau:

$$\begin{cases} W = \dfrac{m\omega^2 A^2}{2} \Rightarrow \omega A = \sqrt{\dfrac{2W}{m}} = ? \\ \begin{cases} v = -\omega A\sin(\omega t + \varphi) \\ a = -\omega^2 A\cos(\omega t + \varphi) \end{cases} \xrightarrow{t=0} \begin{cases} v_0 = -\omega A\sin\varphi \\ a_0 = -\omega^2 A\cos\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega = ? \\ \varphi = ? \end{cases} \end{cases}$$

Nếu $x = A\sin(\omega t + \alpha)$ thì đổi về dạng: $x = A\cos\left(\omega t + \alpha - \dfrac{\pi}{2}\right)$

1.1.14 Tìm thời gian ngắn nhất đi từ x_1 đến vị trí cân bằng và đến vị trí biên

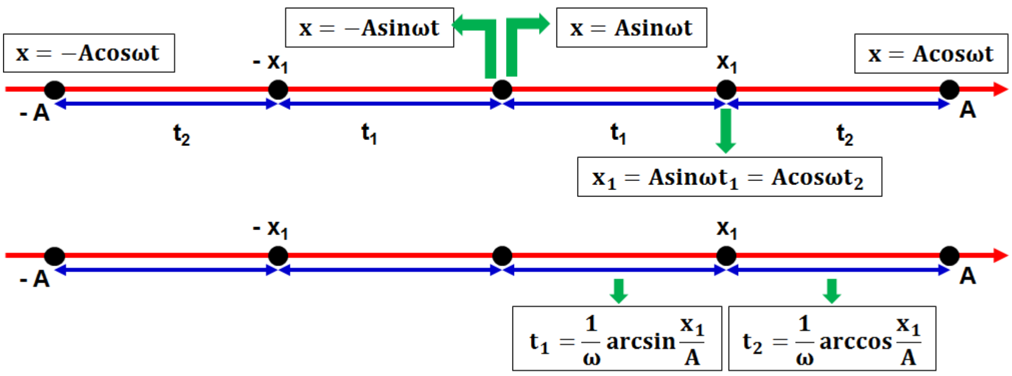
Phương pháp:

Cách 1: Dùng vòng tròn lượng giác

$$\begin{cases} \text{Xác định góc quét tương ứng với sự dịch chuyển: } \Delta\varphi \\ \text{Thời gian: } t = \dfrac{\Delta\varphi}{\omega} \end{cases}$$

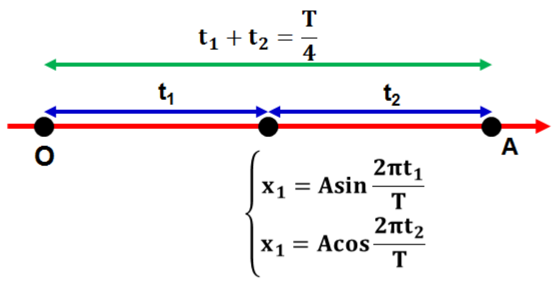
Cách 2: Dùng phương trình lượng giác

$$\begin{cases} x_1 = A\sin\omega t_1 \Rightarrow \sin\omega t_1 = \dfrac{x_1}{A} \Rightarrow t_1 = \dfrac{1}{\omega}\arcsin\dfrac{x_1}{A} \\ x_1 = A\cos\omega t_2 \Rightarrow \cos\omega t_2 = \dfrac{x_1}{A} \Rightarrow t_2 = \dfrac{1}{\omega}\arccos\dfrac{x_1}{A} \end{cases}$$

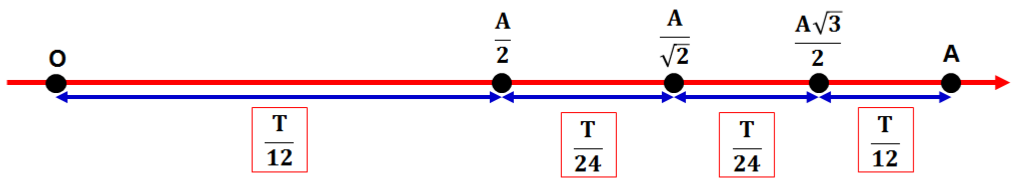


Kinh nghiệm

1. Quy trình bấm máy tính nhanh: $\boxed{\text{SHIFT } \sin(x_1 \div A) \div \omega =}$ (máy tính chọn đơn vị góc là rad)
2. Đối với dạng bài này thì nên giải theo cách 2.
3. Cách nhớ nhanh: *đi từ x_1 đến vị trí cân bằng là* $\boxed{\text{SHIFT } \sin(x_1 \div A) \div \omega =}$, *đi từ x_1 đến vị trí biên là* $\boxed{\text{SHIFT } \cos(x_1 \div A) \div \omega =}$
4. Đối với bài toán ngược ta áp dụng công thức $x_1 = A\sin\omega t_1 = A\cos\omega t_2$.
5. Nếu cho biết quan hệ t_1 và t_2 thì ta có thể tính được các đại lượng khác như: T, A. x_1.



Chú ý: Đối với các điểm đặc biệt, ta dễ dàng tìm được phân bố thời gian như sau:



Kinh nghiệm

1. Nếu số xấu thì dùng $\boxed{\text{SHIFT sin}\,(x_1 \div A) \div \omega =}$, $\boxed{\text{SHIFT cos}\,(x_1 \div A) \div \omega =}$
2. Nếu số đẹp $x_1 = 0; \pm A; \pm\dfrac{A}{\sqrt{2}}; \pm\dfrac{A\sqrt{3}}{2}$ thì dùng trục phân bố thời gian

Chú ý: Khoảng thời gian trong một chu kì vật cách vị trí cân bằng một khoảng:

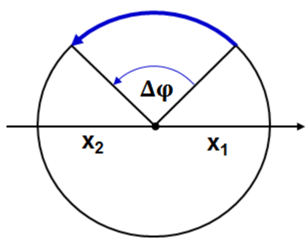
+ nhỏ hơn x_1 là $\Delta t = 4t_1 = 4\dfrac{1}{\omega}\arcsin\dfrac{x_1}{A}$.

+ lớn hơn x_1 là $\Delta t = 4t_2 = 4\dfrac{1}{\omega}\arccos\dfrac{x_1}{A}$.

1.1.15 Tìm thời gian ngắn nhất đi từ x_1 đến x_2

Phương pháp:

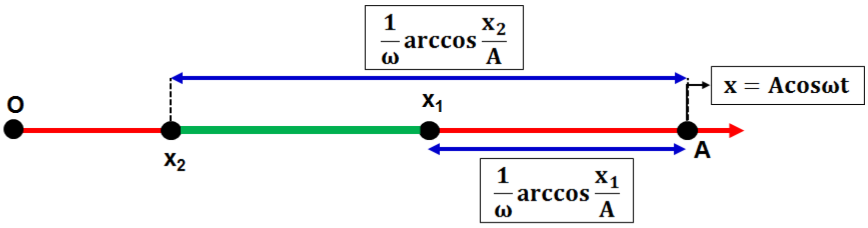
Cách 1: Dùng vòng tròn lượng giác: $\Delta t = \dfrac{\Delta\varphi}{\omega}$



Cách 2: Dùng phương trình lượng giác

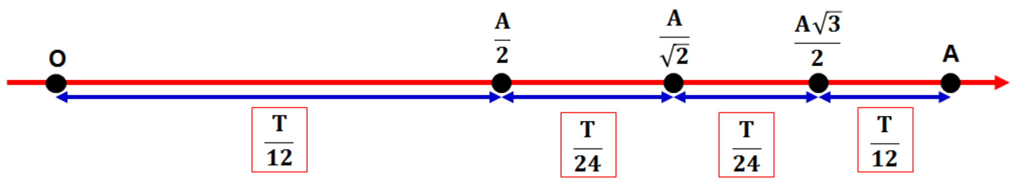
Khoảng thời gian ngắn nhất để vật đi từ điểm có li độ x_1 đến điểm có li độ x_2:

$$\Delta t = \frac{1}{\omega}\left|\arccos\frac{x_2}{A} - \arccos\frac{x_1}{A}\right| = \frac{1}{\omega}\left|\arcsin\frac{x_2}{A} - \arcsin\frac{x_1}{A}\right|$$



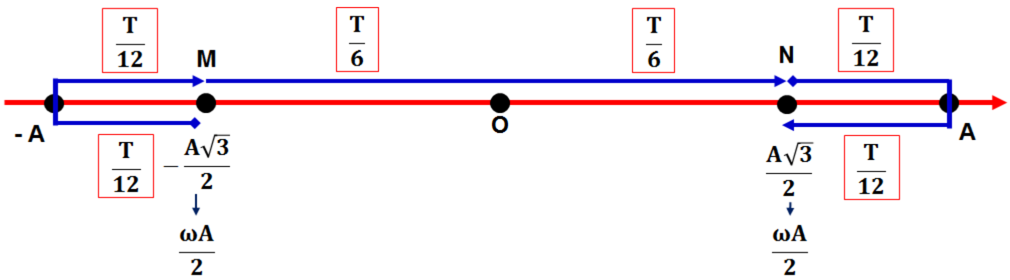
Kinh nghiệm:

1. Đối với dạng toán này không nên dùng cách 1 vì mất nhiều thời gian.
2. Nếu số đẹp $x_1 = 0; \pm A; \pm\frac{A}{\sqrt{2}}; \pm\frac{A\sqrt{3}}{2}$ thì dùng trục phân bố thời gian

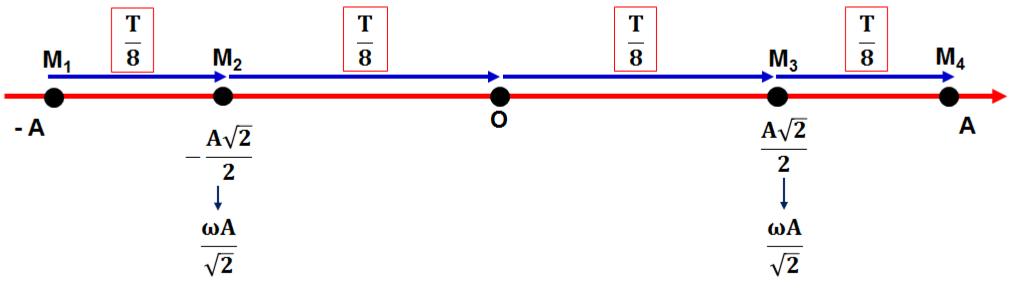


Chú ý: Li độ và vận tốc tại các điểm đặc biệt

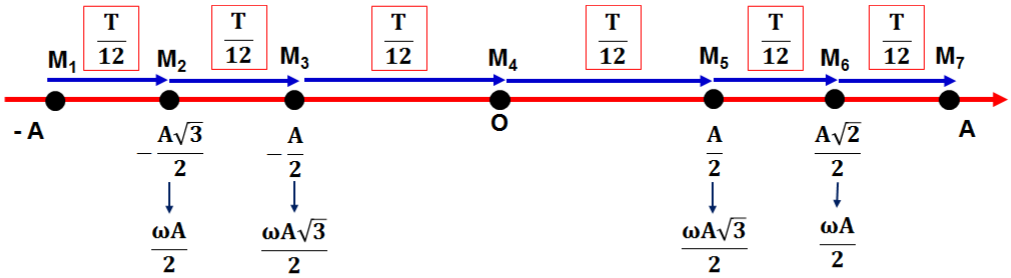
1. Cứ sau khoảng thời gian ngắn nhất $\frac{T}{6}$ thì vật lại đi qua M hoặc O hoặc N. Tốc độ tại M và N đều bằng $\frac{\omega A}{2}$.



2. Cứ sau khoảng thời gian ngắn nhất $\frac{T}{8}$ thì vật lại đi qua M_1, M_2, O, M_3, M_4. Tốc độ tại M_2 và M_3 đều bằng $\frac{\omega A}{\sqrt{2}}$.



3. Cứ sau khoảng thời gian ngắn nhất $\dfrac{T}{12}$ thì vật lại đi qua M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6, M_7. Tốc độ tại M_2 và M_6 đều bằng $\dfrac{\omega A}{2}$. Tốc độ tại M_3 và M_5 đều bằng $\dfrac{\omega A\sqrt{3}}{2}$.



1.1.16 Tìm thời gian ngắn nhất liên quan đến vận tốc, động lượng

Phương pháp:

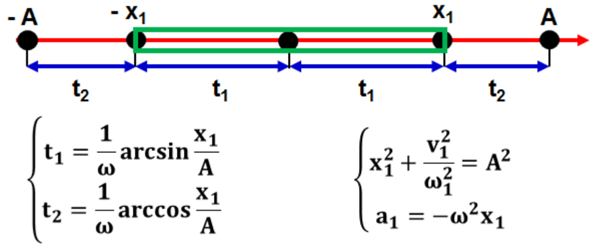
Dựa vào công thức liên hệ vận tốc, động lượng với li độ để quy về li độ.

$$x^2 + \frac{v^2}{\omega^2} = A^2 \Rightarrow \begin{cases} v = v_1 \Rightarrow x_1 = ? \\ v = v_2 \Rightarrow x_2 = ? \end{cases}$$

$$p = mv \Rightarrow \begin{cases} p = p_1 \Rightarrow x_1 = ? \\ p = p_2 \Rightarrow x_2 = ? \end{cases}$$

Chú ý:

1. Vùng tốc độ **lớn** hơn v_1 nằm trong đoạn $[-x_1, x_1]$ và vùng tốc độ **nhỏ** hơn v_1 nằm ngoài đoạn $[-x_1, x_1]$.
2. Khoảng thời gian trong một chu kì tốc độ
   - lớn hơn v_1 là $4t_1$.
   - nhỏ hơn v_1 là $4t_2$



3. Đối với bài toán ngược, ta làm các bước sau:
   - Dựa vào vùng tốc độ lớn hơn hoặc bé hơn v_1, ta biểu diễn t_1 hoặc t_2 theo ω.
   - Thay vào phương trình: $x = A\sin\omega t_1 = A\cos\omega t_2$.
   - Thay vào phương trình: $x_1^2 + \dfrac{v_1^2}{\omega_1^2} = A^2$.

1.1.17 Thời gian ngắn nhất liên quan đến gia tốc, lực và năng lượng

Phương pháp:

Dựa vào công thức liên hệ gia tốc, lực với li độ để quy về li độ

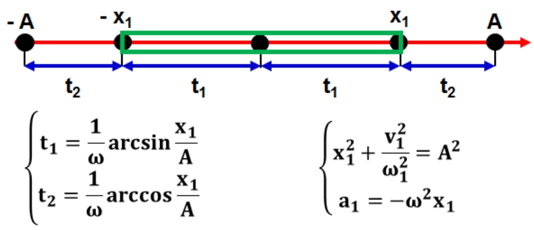
$$\begin{cases} a = -\omega^2 x \Rightarrow \begin{cases} a = a_1 \Rightarrow x_1 = ? \\ a = a_2 \Rightarrow x_2 = ? \end{cases} \\ F = -kx = -m\omega^2 x \Rightarrow \begin{cases} F = F_1 \Rightarrow x_1 = ? \\ F = F_2 \Rightarrow x_2 = ? \end{cases} \end{cases}$$

Chú ý:

1. Vùng $|a|$ **lớn** hơn $|a_1|$ nằm ngoài đoạn $[-x_1, x_1]$ và vùng $|a|$ **nhỏ** hơn $|a_1|$ nằm trong đoạn $[-x_1, x_1]$.
2. Khoảng thời gian trong một chu kì để $|a|$

   \+ lớn hơn $|a_1|$ là $4t_2$

   \+ nhỏ hơn $|a_1|$ là $4t_1$



3. Đối với bài toán ngược ta làm theo các bước sau:
   - Dựa vào vùng $|a|$ nhỏ hơn hay lớn hơn $|a_1|$, ta biểu diễn t_1 hoặc t_2 theo ω
   - Thay vào phương trình: $x = A\sin\omega t_1 = A\cos\omega t_2$.
   - Thay vào phương trình $|x_1| = \omega^2 |a_1|$.
4. Nếu khoảng thời gian liên quan đến W_t, W_d thì ta quy về li độ nhờ các công thức độc lập với thời gian
$$W = W_t + W_d = \frac{kx^2}{2} + \frac{mv^2}{2} = \frac{kA^2}{2}$$
5. Đối với bài toán khoảng thời gian để vật đi từ li độ x_1 đến x_2 là bài toán cơ bản, trên cơ sở bài toán này chúng ta có thể làm được rất nhiều bài toán mở rộng khác nhau như:
   - Tìm thời gian ngắn nhất để vật đi từ li độ x_1 đến vận tốc hay gia tốc nào đó.
   - Tìm khoảng thời gian từ lúc bắt đầu khảo sát dao động đến khi vật qua tọa độ x nào đó lần thứ n.
   - Tìm khoảng thời gian từ lúc bắt đầu khảo sát dao động đến khi vật nhận vận tốc hay gia tốc nào đó lần thứ n.
   - Tìm vận tốc hay tốc độ trung bình trên một quỹ đạo chuyển động nào đó.
   - Tìm khoảng thời gian mà lò xo nén, dãn trong một chu kì chuyển động.
   - Tìm khoảng thời gian mà bóng đèn sáng, tối trong một chu kì hay trong một khoảng thời gian nào đó.
   - Tìm khoảng thời gian mà tụ điện C phóng hay tích điện từ giá trị q_1 đến q_2
   - Các bài toán ngược liên quan đến khoảng thời gian...

1.1.18 Tìm thời điểm vật đi qua x_1 theo chiều dương (âm)

Phương pháp

Cách 1: Giải phương trình lượng giác

$$\begin{cases} x = A\cos(\omega t + \varphi) = x_1 \\ v = -\omega A\sin(\omega t + \varphi) = v_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = t_{01} + kT \\ t = t_{02} + mT \end{cases} \quad (t_{01}, t_{02} \geq 0 \Rightarrow k, m = 0, 1, 2\ldots)$$

Cách 2: Dùng vòng tròn lượng giác

- Tìm vị trí xuất phát: $\Phi_0 = \omega t_1 + \varphi$.
- Xác định vị trí cần đến.
- Tìm góc quét $\Delta\varphi$
- Thời gian: $t = \dfrac{\Delta\varphi}{\omega}$

Cách 3: Chỉ dùng vòng tròn lượng giác để xác định thời điểm đầu tiên

- Tìm vị trí xuất phát: $\Phi_0 = \omega.0 + \varphi = \varphi$
- Tìm $\left\langle \begin{array}{l} \text{Thời điểm đầu tiên vật đến } x_1 \text{ theo chiều dương: } t = t_1 + k.T \ \ (k = 0, 1, 2\ldots) \\ \text{Thời điểm đầu tiên vật đến } x_1 \text{ theo chiều âm: } t = t_1 + k.T \ \ (k = 0, 1, 2\ldots) \end{array} \right.$
- $\left\{ \begin{array}{l} \text{Lần thứ 1 vật đến} x = x_1 \text{ theo chiều dương (âm) là: } t_1 \\ \text{Lần thứ 2 vật đến } x = x_1 \text{ theo chiều dương (âm) là: } t_2 = t_1 + T \\ \ldots \\ \text{Lần thứ n vật đến} x = x_1 \text{ theo chiều dương (âm) là: } t_n = t_1 + (n-1)\,T \end{array} \right.$

Kinh nghiệm:

1. Bài toán tìm các thời điểm vật qua vị trí x_1 theo chiều dương (âm) thì nên dùng cách 1.
2. Bài toán tìm thời điểm lần thứ n vật qua x_1 theo chiều dương (âm) thì nên dùng cách 2, 3.

1.1.19 Tìm các thời điểm vật qua x_1 tính cả hai chiều

Phương pháp

Cách 1: Giải phương trình lượng giác

Giải phương trình:

$$x = A\cos(\omega t + \varphi) = x_1 \Rightarrow \cos(\omega t + \varphi) = \frac{x_1}{A} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \omega t + \varphi = \alpha + k.2\pi \\ \omega t + \varphi = -\alpha + k.2\pi \end{array} \right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = ? \\ t_2 = ? \end{array} \right.$$

Trong một chu kì vật qua mỗi vị trí biên một lần và các vị trí khác hai lần. Để tìm hai thời điểm đầu tiên (t_1 và t_2) có thể dùng PTLG hoặc VTLG. Để tìm thời điểm ta làm như sau

$$\frac{\text{Số lần}}{2} = n \left\langle \begin{array}{l} \text{dư 1:} t = nT + t_1 \\ \text{dư 2:} t = nT + t_2 \end{array} \right.$$

Cách 2: Dùng vòng tròn lượng giác

- Tìm vị trí xuất phát: $\Phi_0 = \omega t_1 + \varphi$.
- Xác định vị trí cần đến.
- Tìm góc quét $\Delta\varphi$.
- Thời gian: $t = \dfrac{\Delta\varphi}{\omega}$

1.1.20 Tìm thời điểm vật qua vị trí cân bằng một đoạn b

Phương pháp

Trong một chu kì vật qua mỗi vị trí biên một lần và các vị trí khác hai lần. Vì vậy, nếu $b = 0$ hoặc $b = A$ thì trong mỗi chu kì có hai lần $|x| = b$, ngược lại trong một chu kì có bốn lần $|x| = b$ (hai lần vật qua $x = +b$ và hai lần vật qua $x = -b$. Để tìm bốn thời điểm đầu tiên, t_1, t_2, t_3 và t_4, ta có thể dùng phương trình lượng giác hoặc vòng tròn lượng giác. Để tìm thời điểm tiếp theo, ta làm như sau:

$$\frac{\text{Số lần}}{4} = n \rightarrow \begin{cases} \text{dư 1: } t = t_1 + nT \\ \text{dư 2: } t = t_2 + nT \\ \text{dư 3: } t = t_3 + nT \\ \text{dư 4: } t = t_2 + nT \end{cases}$$

Chú ý:

1. Nếu khoảng thời gian liên quan đến W_t, W_d thì ta quy về li độ nhờ các công thức độc lập với thời gian
$$W = W_t + W_d = \frac{kx^2}{2} + \frac{mv^2}{2} = \frac{kA^2}{2}$$
2. Nếu thời điểm liên quan đến vận tốc, gia tốc, lực... thì ta có thể làm như sau:
   - Giải trực tiếp phương trình phụ thuộc t của v, a, F...
   - Dựa vào phương trình độc lập với thời gian để quy về li độ

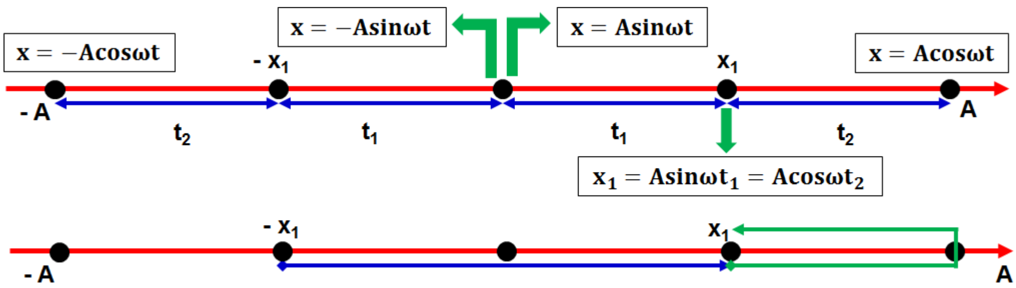
1.1.21 Quãng đường đi được tối đa, tối thiểu

Phương pháp

*** Trường hợp 1:** $\Delta t < \dfrac{T}{2} \Rightarrow \Delta\varphi = \omega\Delta t < \pi$

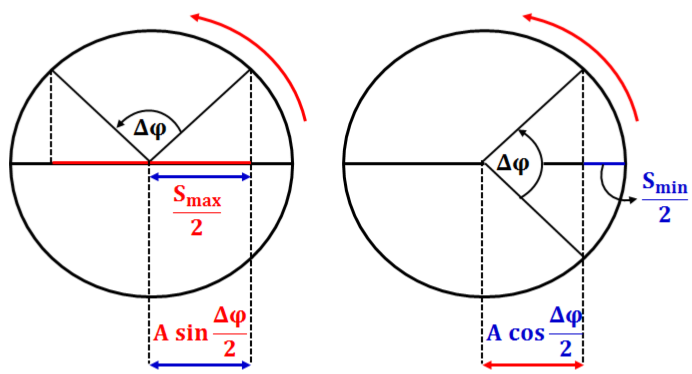
Trong dao động điều hòa, càng gần vị trí biên thì tốc độ càng bé. Vì vậy trong cùng một khoảng thời gian nhất định muốn đi được quãng đường lớn nhất thì đi xung quanh vị trí cân bằng và muốn đi được quãng đường bé nhất thì đi xung quanh vị trí biên.

Cách 1: Dùng phương trình lượng giác



$$\begin{cases} \text{Quãng đường cực đại} \Leftrightarrow t_1 = \dfrac{\Delta t}{2} \Rightarrow S_{\max} = 2A\sin\omega t_1 = 2A\sin\dfrac{\Delta\varphi}{2} \\ \text{Quãng đường cực tiểu} \Leftrightarrow t_2 = \dfrac{\Delta t}{2} \Rightarrow S_{\min} = 2A\left(1-\cos\omega t_2\right) = 2A\left(1-\cos\dfrac{\Delta\varphi}{2}\right) \end{cases}$$

Cách 2: Dùng vòng tròn lượng giác



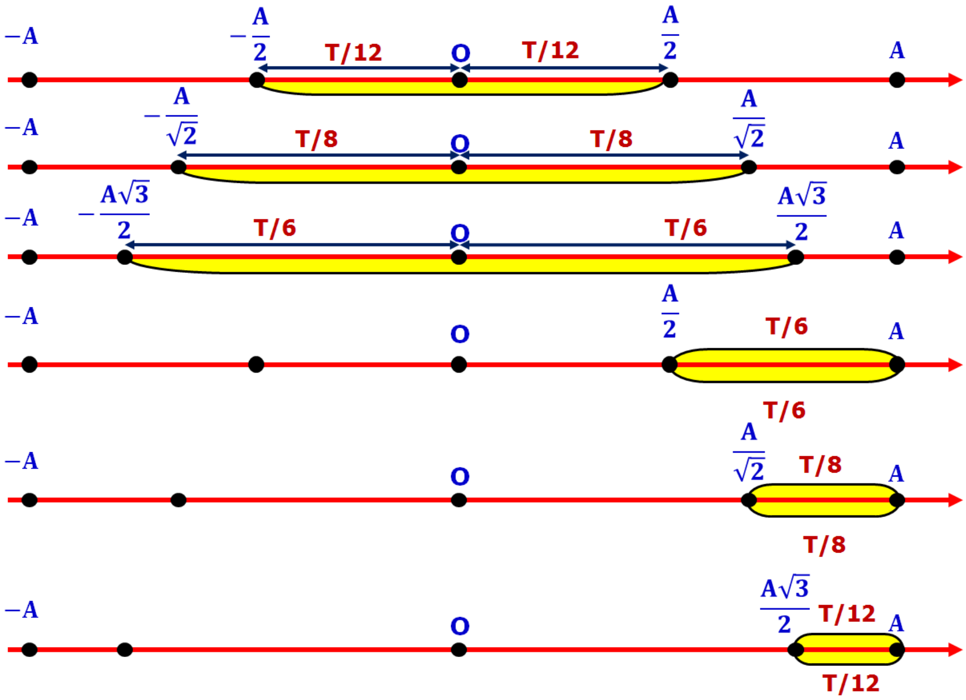
$$\Delta\varphi = \omega\Delta t \Rightarrow \begin{cases} S_{\max} = 2A\sin\dfrac{\Delta\varphi}{2} \\ S_{\min} = 2A\left(1-\cos\dfrac{\Delta\varphi}{2}\right) \end{cases}$$

Quy trình giải nhanh

$$\begin{cases} \Delta\varphi = \omega\Delta t \\ S_{\max} \leftrightarrow \sin \Rightarrow \text{Đi xung quanh VTCB} \\ S_{\min} \leftrightarrow \cos \Rightarrow \text{Đi xung quanh biên} \end{cases}$$

Chú ý

- Đối với các khoảng thời gian đặc biệt $T/3$, $T/4$, $T/6$,... để tìm S_{max}, S_{min} nhanh, ta sử dụng trục phân bố thời gian



- Đối với bài toán tìm thời gian cực đại và cực tiểu để đi được quãng đường S thì cần lưu ý: Thời gian cực đại ứng với công thức quãng đường cực tiểu. Thời gian cực tiểu ứng vớicông thức quãng đường cực đại.

$$\begin{cases} t_{\min} \leftrightarrow S_{\max} = 2A\sin\dfrac{\Delta\varphi}{2} \\ t_{\max} \leftrightarrow S_{\min} = 2A\left(1-\cos\dfrac{\Delta\varphi}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow \Delta\varphi = \omega\Delta t \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t_{\min} = \Delta t \\ t_{\max} = \Delta t \end{array}\right.$$

* **Trường hợp 2:** $\Delta t' > \dfrac{T}{2} \Rightarrow \Delta t' = nT + \Delta t$ với $0 < \Delta T < \dfrac{T}{2}$

Vì quãng đường đi được trong khoảng thời gian $n\dfrac{T}{2}$ luôn luôn là $n.2A$ nên quãng đường lớn nhất hay nhỏ nhất là do Δt quyết định.

$$\begin{cases} S'_{\max} = n2A + S_{\max} = n.2A + 2A\sin\dfrac{\Delta\varphi}{2} \\ S'_{\min} = n.2A + S_{\min} = n.2A + 2A\left(1-\cos\dfrac{\Delta\varphi}{2}\right) \end{cases}$$

Hai trường hợp đơn giản xuất hiện nhiều trong các đề thi:

$$\begin{cases} \Delta t' = \underbrace{n\dfrac{T}{2}}_{n.2A} + \underbrace{\dfrac{T}{6}}_{S_{\max}=A} \Rightarrow S'_{\max} = n.2A + A \\ \Delta t' = \underbrace{n\dfrac{T}{2}}_{n.2A} + \underbrace{\dfrac{T}{3}}_{S_{\min}=A} \Rightarrow S'_{\min} = n.2A + A \end{cases}$$

Quy trình giải nhanh

$$\frac{\Delta t'}{0,5T} = n,m$$

$$\Delta\varphi = \omega\Delta t \Rightarrow \begin{cases} S_{\max} = 2A\sin\dfrac{\Delta\varphi}{2} \\ S_{\min} = 2A\left(1-\cos\dfrac{\Delta\varphi}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S'_{\max} = n2A + S_{\max} \\ S'_{\min} = n.2A + S_{\min} \end{cases}$$

Chú ý

1. Để tìm thời gian đi được quãng đường dài nhất S', ta phân tích như sau:

$$S' = \underbrace{n.2A}_{n.T/2} + \underbrace{S}_{2\frac{1}{\omega}\arcsin\frac{0,5S}{A} = \frac{T}{\pi}\arcsin\frac{0,5S}{A}} \Rightarrow t = n.\frac{T}{2} + \frac{T}{\pi}\arcsin\frac{0,5S}{A}$$

2. Để tìm thời gian đi được quãng đường ngắn nhất S', ta phân tích như sau:

$$S' = \underbrace{n.2A}_{n.T/2} + \underbrace{S}_{2\frac{1}{\omega}\arccos\frac{A-0,5S}{A} = \frac{T}{\pi}\arccos\frac{A-0,5S}{A}} \Rightarrow t = n.\frac{T}{2} + \frac{T}{\pi}\arccos\frac{A-0,5S}{A}$$

Kinh nghiệm: Đề thi trắc nghiệm thường liên quan đến các trường hợp đặc biệt

1. Trong thời gian $\Delta t'$ quãng đường đi được tối đa là $S = n.2A + A$ thì $\Delta t' = n.\dfrac{T}{2} + \dfrac{T}{6}$. Đồng thời khi bắt đầu và kết thúc quãng đường đó vật chỉ có thể ở một trong hai vị trí: $x = \pm\dfrac{A}{2} \Leftrightarrow v = \pm\dfrac{\omega A\sqrt{3}}{2}$.
2. Trong thời gian $\Delta t'$ quãng đường đi được tối thiểu là $S = n.2A + A$ thì $\Delta t' = n.\dfrac{T}{2} + \dfrac{T}{3}$. Đồng thời khi bắt đầu và kết thúc quãng đường đó vật chỉ có thể ở một trong hai vị trí: $x = \pm\dfrac{A}{2} \Leftrightarrow v = \pm\dfrac{\omega A\sqrt{3}}{2}$.
3. Trong thời gian $\Delta t'$ quãng đường đi được tối đa là $S = n.2A + A\sqrt{2}$ thì $\Delta t' = n.\dfrac{T}{2} + \dfrac{T}{4}$.

Đồng thời khi bắt đầu và kết thúc quãng đường đó vật chỉ có thể ở một trong hai vị trí: $x = \pm\dfrac{A}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow v = \pm\dfrac{\omega A}{\sqrt{2}}$.

4. Trong thời gian $\Delta t'$ quãng đường đi được tối thiểu là $S = n.2A + \left(2A - A\sqrt{2}\right)$ thì $\Delta t' = n.\dfrac{T}{2} + \dfrac{T}{4}$. Đồng thời khi bắt đầu và kết thúc quãng đường đó vật chỉ có thể ở một trong hai vị trí: $x = \pm\dfrac{A}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow v = \pm\dfrac{\omega A}{\sqrt{2}}$.

5. Trong thời gian $\Delta t'$ quãng đường đi được tối đa là $S = n.2A + A\sqrt{3}$ thì $\Delta t' = n.\dfrac{T}{2} + \dfrac{T}{3}$. Đồng thời khi bắt đầu và kết thúc quãng đường đó vật chỉ có thể ở một trong hai vị trí: $x = \pm\dfrac{A\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow v = \pm\dfrac{\omega A}{2}$.

6. Trong thời gian $\Delta t'$ quãng đường đi được tối thiểu là $S = n.2A + \left(2A - A\sqrt{3}\right)$ thì $\Delta t' = n.\dfrac{T}{2} + \dfrac{T}{6}$. Đồng thời khi bắt đầu và kết thúc quãng đường đó vật chỉ có thể ở một trong hai vị trí: $x = \pm\dfrac{A\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow v = \pm\dfrac{\omega A}{2}$.

1.1.22 Tìm quãng đường đi được từ t_1 đến t_2

Phương pháp

♣ Nếu biểu diễn:

$$t_2 - t_1 = nT + \Delta t \rightarrow \begin{cases} \dfrac{t_2 - t_1}{T} = n, q \\ \Delta t = (t_2 - t_1) - nT \end{cases}$$

Quãng đường đi được: $\mathbf{S = n.4A + S_{\text{thêm}}}$ với $S_{\text{thêm}}$ là quãng đường đi được từ thời điểm $t_1 + nT$ đến thời điểm t_2

♣ Nếu biểu diễn

$$t_2 - t_1 = mT + \Delta t \rightarrow \begin{cases} \dfrac{t_2 - t_1}{0,5T} = m, q \\ \Delta t = (t_2 - t_1) - m\dfrac{T}{2} \end{cases}$$

Quãng đường đi được: $\mathbf{S = m.2A + S_{\text{thêm}}}$ với $S_{\text{thêm}}$ là quãng đường đi được từ thời điểm $t_1 + mT/2$ đến thời điểm t_2

Để tìm $S_{\text{thêm}}$ thông thường dùng ba cách sau:

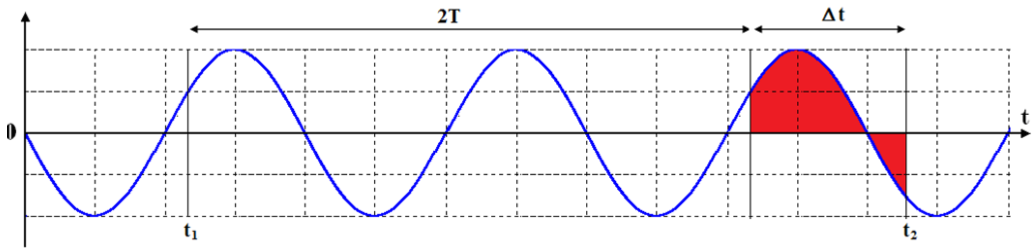
- **Cách 1:** Dùng trục thời gian để xác định quãng đường dịch chuyển từ trạng thái 1 đến trạng thái 2.

- **Cách 2:** Dùng vòng tròn lượng giác để xác định quãng đường dịch chuyển từ trạng thái 1 đến trạng thái 2.

- **Cách 3:** Dùng tích phân xác định

Cơ sở phương pháp:

$v = \dfrac{dx}{dt} \Rightarrow |v| = \dfrac{|dx|}{dt} = \dfrac{ds}{dt} \Rightarrow ds = |v|\,dt$ (trong đó ds là quãng đường chất điểm đi được trong thời gian dt). Quãng dường chất điểm đi được từ thời điểm $t_1 + mT/2$ đến thời điểm t_2 là $S_{\text{thêm}} = \int\limits_{t_1+mT/2}^{t_2} |v|\,dt$ (chính là diện tích phần tô màu)



Nếu phương trình li độ là $x = A\cos(\omega t + \varphi)$ thì phương trình vận tốc là $v = -\omega A\sin(\omega t + \varphi)$:

$$\int\limits_{t_1+mT/2}^{t_2} |\omega A\sin(\omega t + \varphi)|\,dt$$

Để tính tích phân này, ta có thể dùng máy tính cầm tay. Chú ý: *tốc độ tính của máy nhanh hay chậm phụ thuộc vào cận lấy tích phân và pha ban đầu*

Quy trình giải nhanh

$$m = \left[\frac{t_2 - t_1}{0,5T}\right] \left\{ \begin{array}{l} x = A\cos(\omega t + \varphi) \Rightarrow S = m.2A + \int\limits_{t_1+mT/2}^{t_2} |\omega A\sin(\omega t + \varphi)|\,dt \\ x = A\sin(\omega t + \varphi) \Rightarrow S = m.2A + \int\limits_{t_1+mT/2}^{t_2} |\omega A\cos(\omega t + \varphi)|\,dt \end{array} \right.$$

$$n = \left[\frac{t_2 - t_1}{T}\right] \left\{ \begin{array}{l} x = A\cos(\omega t + \varphi) \Rightarrow S = n.4A + \int\limits_{t_1+nT}^{t_2} |\omega A\sin(\omega t + \varphi)|\,dt \\ x = A\sin(\omega t + \varphi) \Rightarrow S = n.4A + \int\limits_{t_1+nT}^{t_2} |\omega A\cos(\omega t + \varphi)|\,dt \end{array} \right.$$

Chú ý

1. Đối với đề thi trắc nghiệm thông thường liên quan đến các trường hợp đặc biệt sau đây

   - Bất kể vật xuất phát từ đâu, quãng đường vật đi sau một chu kì luôn luôn là 4A.

   $$t_2 - t_1 = nT \Rightarrow S = n.4A$$

   - Bất kể vật xuất phát từ đâu, quãng đường vật đi sau nửa chu kì luôn luôn là 4A.

   $$t_2 - t_1 = m\frac{T}{2} \Rightarrow S = m.2A$$

   - Nếu vật xuất phát từ vị trí cân bằng ($x_{(t_1)} = 0$) hoặc từ vị trí biên ($x_{(t_1)} = \pm A$) thì quãng đường vật đi sau một phần tư chu kì là A.

   $$t_2 - t_1 = k\frac{T}{4} \Rightarrow S = k.A$$

   - Căn cứ vào tỉ số:

   $$\frac{t_2 - t_1}{0,5T} = q \to \begin{cases} \text{Số nguyên} \Rightarrow S = q.2A \\ \text{Số bán nguyên và } x_{(t_1)} = 0, \pm A \Rightarrow S = q.2A \end{cases}$$

2. Có thể dùng dùng phương pháp "Rào" để loại trừ các phương án:

   - Quãng đường đi được "trung bình" vào cỡ:

   $$\bar{S} = \frac{t_2 - t_1}{0,5T}.2A$$

   - Độ chênh lệch với giá trị thực vào cỡ:

   $$\begin{aligned}\Delta A = \frac{S_{\max} - S_{\min}}{2} &= \frac{2A\sin\frac{\Delta\varphi}{2} - 2A\left(1 - \cos\frac{\Delta\varphi}{2}\right)}{2} \\ &= A\left(\sin\frac{\Delta\varphi}{2} + \cos\frac{\Delta\varphi}{2} - 1\right) < A\left(\sqrt{2} - 1\right) \approx 0,4A\end{aligned}$$

   - Quãng đường đi được vào cỡ:

   $$S = \overline{S} + \Delta A$$

1.1.23 Thời gian đi được quãng đường nhất định

Phương pháp

+ Các trường hợp riêng

  - Quãng đường đi được sau nửa chu kì là $2A$ và sau$n.T/2$ là $n.2A$

  - Quãng đường đi được sau một chu kì là $4A$ và sau mT là $m.4A$.

  - Nếu vật xuất phát từ vị trí cân bằng ($x_{(t_1)} = 0$) hoặc từ vị trí biên ($x_{(t_1)} = \pm A$) thì quãng đường vật đi sau một phần tư chu kì là A và sau $nT/4$ là nA.

+ Các trường hợp khác: Phối hợp vòng tròn lượng giác với trục thời gian để xác định

1.1.24 Tính vận tốc trung bình và tốc độ trung bình

Phương pháp

Vận tốc trung bình: $\bar{v} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \begin{cases} x_1 = A\cos(\omega t_1 + \varphi) \\ x_2 = A\cos(\omega t_2 + \varphi) \end{cases}$

Tốc độ trung bình: $|\bar{v}| = \dfrac{\Delta S}{\Delta t} = \dfrac{\Delta S}{t_2 - t_1}$

Vận tốc trung bình có thể âm, dương hoặc bằng 0 nhưng tốc độ trung bình luôn dương

Quy trình giải nhanh

$$m = \left[\frac{t_2 - t_1}{0,5T}\right] \begin{cases} x = A\cos(\omega t + \varphi) \Rightarrow |\bar{v}| = \dfrac{S}{t_2 - t_1} = \dfrac{m.2A + \int\limits_{t_1 + m.T/2}^{t_2} |\omega A \sin(\omega t + \varphi)|\, dt}{t_2 - t_1} \\ x = A\sin(\omega t + \varphi) \Rightarrow |\bar{v}| = \dfrac{S}{t_2 - t_1} = \dfrac{m.2A + \int\limits_{t_1 + m.T/2}^{t_2} |\omega A \cos(\omega t + \varphi)|\, dt}{t_2 - t_1} \end{cases}$$

$$n = \left[\frac{t_2 - t_1}{T}\right] \begin{cases} x = A\cos(\omega t + \varphi) \Rightarrow |\bar{v}| = \dfrac{S}{t_2 - t_1} = \dfrac{n.4A + \int\limits_{t_1 + nT}^{t_2} |\omega A \sin(\omega t + \varphi)|\, dt}{t_2 - t_1} \\ x = A\sin(\omega t + \varphi) \Rightarrow |\bar{v}| = \dfrac{S}{t_2 - t_1} = \dfrac{n.4A + \int\limits_{t_1 + nT}^{t_2} |\omega A \cos(\omega t + \varphi)|\, dt}{t_2 - t_1} \end{cases}$$

Chú ý

1. Cách dùng máy tính chiếm ưu thế vượt trội so với cách làm truyền thống. Bài toàn quãng đường đi được hoặc tốc độ trung bình từ t_1 đến t_2 nếu giải theo cách truyền thống thì học sinh có học lực trung bình trở xuống cảm thấy khó khăn nhưng nếu giải theo cách mới thì mọi chuyện sẽ ổn.

2. Bài toán liên quan đế pha dao động thì dựa vào vòng tròn lượng giác

   - Tìm vị trí đầu và vị trí cuối trên vòng tròn lượng giác.
   - Quãng đường đi được $\Delta S =$ Chiều dài hình chiếu dịch chuyển.
   - Góc quét thêm và thời gian quét: $\Delta\varphi = \Phi_2 - \Phi_1 \Rightarrow \Delta t = \dfrac{\Delta\varphi}{\omega}$.
   - Tốc độ trung bình: $|\bar{v}| = \dfrac{\Delta S}{\Delta t}$

3. Tốc độ trung bình lớn nhất và nhỏ nhất: $\begin{cases} |\bar{v}|_{\min} = \dfrac{S_{\min}}{\Delta t} = \dfrac{S'_{\min}}{\Delta t'} \\ |\bar{v}|_{\max} = \dfrac{S_{\max}}{\Delta t} = \dfrac{S'_{\max}}{\Delta t'} \end{cases}$

   - Nếu $\Delta t < \dfrac{T}{2} \Rightarrow \Delta\varphi = \omega\Delta t < \pi$ thì $\begin{cases} |\bar{v}|_{\min} = \dfrac{S_{\min}}{\Delta t} = \dfrac{2A\left(1 - \cos\frac{\Delta\varphi}{2}\right)}{\Delta t} \\ |\bar{v}|_{\max} = \dfrac{S_{\max}}{\Delta t} = \dfrac{2A\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\Delta t} \end{cases}$
   - Nếu $\Delta t' > \dfrac{T}{2} \Rightarrow \Delta t' = nT + \Delta t$ thì $\begin{cases} |\bar{v}|_{\min} = \dfrac{S'_{\min}}{\Delta t'} = \dfrac{n.2A + 2A\left(1 - \cos\frac{\Delta\varphi}{2}\right)}{\Delta t'} \\ |\bar{v}|_{\max} = \dfrac{S'_{\max}}{\Delta t'} = \dfrac{n.2A + 2A\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\Delta t'} \end{cases}$

4. Khi biết vận tốc trung bình và tốc độ trung bình tính các đại lượng khác, ta dựa vào định nghĩa để suy ngược:

   Vận tốc trung bình: $\bar{v} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}\begin{cases} \bar{v} > 0 \Rightarrow x_2 > x_1 \\ \bar{v} < 0 \Rightarrow x_2 < x_1 \\ \bar{v} = 0 \Rightarrow x_2 = x_1 \end{cases}$

   Tốc độ trung bình: $|\bar{v}| = \dfrac{\Delta S}{\Delta t} = \dfrac{\Delta S}{t_2 - t_1}$

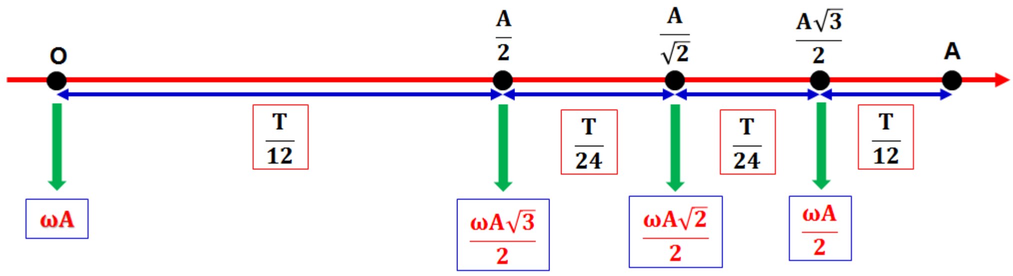
   * Hai điểm liên tiếp trên quỹ đạo có $v = 0$ thì $\left[\begin{array}{l} x_1 = -A,\ x_2 = A \\ x_1 = A,\ x_2 = -A \end{array}\right.$ và thời gian đi ngắn nhất giữa hai thời điểm này là $t_2 - t_1 = \dfrac{T}{2}$

   * Hai điểm liên tiếp trên quỹ đạo có $|v| = \dfrac{\omega A}{2}$ thì $\left[\begin{array}{l} x_1 = -\dfrac{A\sqrt{3}}{2},\ x_2 = \dfrac{A\sqrt{3}}{2} \\ x_1 = \dfrac{A\sqrt{3}}{2},\ x_2 = -\dfrac{A\sqrt{3}}{2} \end{array}\right.$ và thời gian

đi ngắn nhất giữa hai thời điểm này là $t_2 - t_1 = \frac{T}{3}$

* Hai điểm liên tiếp trên quỹ đạo có $|v| = \frac{\omega A}{\sqrt{2}}$ thì $\left[\begin{array}{l} x_1 = -\frac{A}{\sqrt{2}}, x_2 = \frac{A}{\sqrt{2}} \\ x_1 = \frac{A}{\sqrt{2}}, x_2 = -\frac{A}{\sqrt{2}} \end{array}\right.$ và thời gian đi ngắn nhất giữa hai thời điểm này là $t_2 - t_1 = \frac{T}{4}$

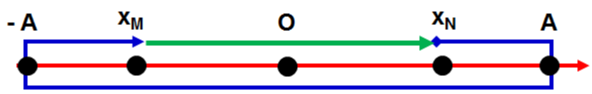
* Hai điểm liên tiếp trên quỹ đạo có $|v| = \frac{\omega A\sqrt{3}}{2}$ thì $\left[\begin{array}{l} x_1 = -\frac{A}{2}, x_2 = \frac{A}{2} \\ x_1 = \frac{A}{2}, x_2 = -\frac{A}{2} \end{array}\right.$ và thời gian đi ngắn nhất giữa hai thời điểm này là $t_2 - t_1 = \frac{T}{6}$



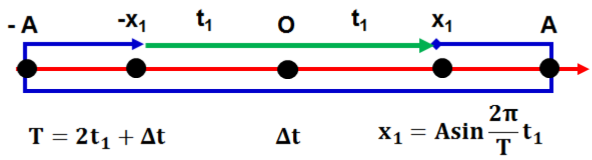
1.1.25 Các bài toán liên quan vừa quãng đường, vừa thời gian

Phương pháp

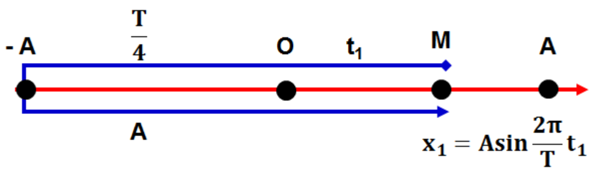
* Vật dao động điều hòa từ x_M đến x_N (lúc này đi theo một chiều) và đi tiếp một đoạn đường s đủ một chu kì thì: $4A = s + |x_N - x_M|$



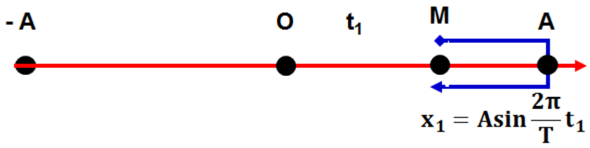
* Vật dao động điều hòa đi từ $-x_1$ đến x_1 trong thời gian$2t_1$ (lúc này đi theo một chiều) và đi tiếp một thời gian Δt thì đủ một chu kì: $T = 2t_1 + \Delta t \Rightarrow x_1 = A\sin\frac{2\pi}{T}t_1$



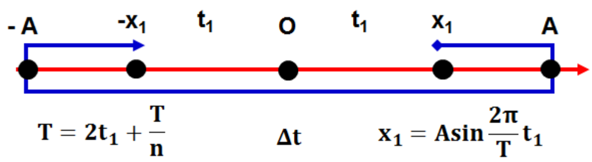
* Vật dao động điều hòa đi từ điểm M một đoạn đường s (lúc này đi theo một chiều) thì đến biên và đi tiếp $\frac{T}{n}\left(\frac{T}{4}<\frac{T}{n}<\frac{T}{2}\right)$ thì trở về M: $\begin{cases} s = A + x_1 \\ \frac{T}{n} = \frac{T}{4} + t_1 \end{cases} \Rightarrow x_1 = A\sin\frac{2\pi}{T}t_1$



* Vật dao động điều hòa đi từ điểm M một đoạn đường s (lúc này đi theo một chiều) thì đến biên và đi tiếp $\frac{T}{n}\left(\frac{T}{n}<\frac{T}{4}\right)$ thì trở về M: $\begin{cases} s = A + x_1 \\ \frac{T}{n} = \frac{T}{4} + t_1 \end{cases} \Rightarrow x_1 = A\sin\frac{2\pi}{T}t_1$



* Vật dao động điều hòa trong $\frac{T}{n}\left(\frac{T}{2}<\frac{T}{n}<T\right)$ vật đi từ $-x_1$ đến x_1: $T = 2t_1 + \frac{T}{n} \Rightarrow x_1 = A\sin\frac{2\pi}{T}t_1$



1.2 Con lắc lò xo

- Con lắc lò xo gồm một lò xo có độ cứng k, khối lượng không đáng kể, một đầu gắn cố định, đầu kia gắn với vật nặng khối lượng m.
- Tại thời điểm t bất kì vật có li độ x. Lực đàn hồi của lò xo $F = -kx$.
- Áp dụng định luật II Niutơn ta có: $ma = -kx \to a + \frac{k}{m}x = 0$. Đặt $\omega^2 = \frac{k}{m}$ viết lại: $x'' + \omega x = 0$; nghiệm của phương trình là $x = A\cos(\omega t + \varphi)$ là một hệ dao động điều hòa.
- Chu kì dao động của con lắc lò xo: $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

- Lực gây ra dao động điều hòa luôn luôn hướng về vị trí cân bằng và được gọi là lực kéo về hay lực hồi phục. Lực kéo về có độ lớn tỉ lệ với li độ và là lực gây ra gia tốc cho vật dao động điều hòa. Biểu thức tính lực kéo về: $F = -kx$.
- Thế năng: $W_t = \dfrac{1}{2}kx^2 = \dfrac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \varphi)$
- Động năng: $W_d = \dfrac{mv^2}{2} = \dfrac{1}{2}m\omega^2A^2\sin^2(\omega t + \varphi)$

  Động năng và thế năng của vật dao động điều hòa biến thiên tuần hoàn với tần số góc $\omega' = 2\omega$, tần số $f' = 2f$ và chu kì $T' = \dfrac{T}{2}$.
- Cơ năng: $W = W_t + W_d = \dfrac{kA^2}{2} = \dfrac{m\omega^2A^2}{2} =$ hằng số

  Cơ năng của con lắc tỉ lệ với bình phương biên độ dao động.

  Cơ năng của con lắc được bảo toàn nếu bỏ qua mọi ma sát.

1.2.1 Con lắc lò xo dao động trong hệ quy chiếu quán tính

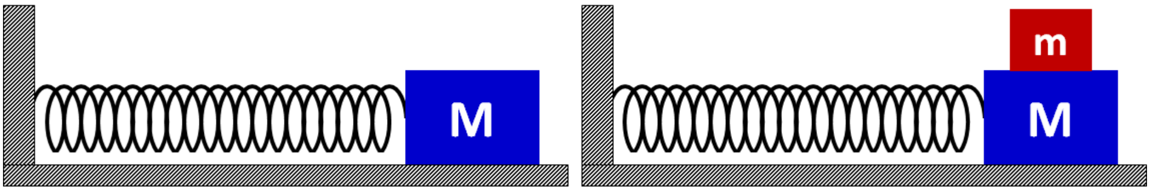
Phương pháp

$\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$; $f = \dfrac{\omega}{2\pi}$; $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}} = \dfrac{\Delta t}{n}$

* Cố định k, cho m biến đổi: $\dfrac{T'}{T} = \dfrac{2\pi\sqrt{\dfrac{m'}{k}}}{2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}} = \sqrt{\dfrac{m'}{m}}$

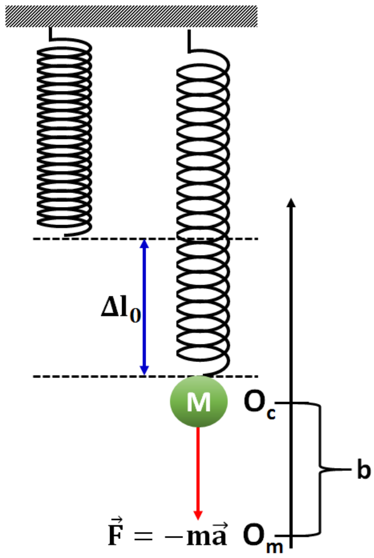
$$\begin{cases} T_1 = 2\pi\sqrt{\dfrac{m_1}{k}} = \dfrac{\Delta t_1}{n} \\ T_2 = 2\pi\sqrt{\dfrac{m_2}{k}} = \dfrac{\Delta t_2}{n} \\ T_{\text{tổng}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{m_1 + m_2}{k}} = \dfrac{\Delta t_{\text{tổng}}}{n} \\ T_{\text{hiệu}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{m_1 - m_2}{k}} = \dfrac{\Delta t_{\text{hiệu}}}{n} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_1^2 + T_2^2 = T_{\text{tổng}}^2 \\ T_1^2 - T_2^2 = T_{\text{hiệu}}^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{f_1^2} + \dfrac{1}{f_2^2} = \dfrac{1}{f_{\text{tổng}}^2} \\ \dfrac{1}{f_1^2} - \dfrac{1}{f_2^2} = \dfrac{1}{f_{\text{hiệu}}^2} \end{cases}$$

* Phương pháp đo khối lượng: $\begin{cases} T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{M}{k}} \Rightarrow \dfrac{T_0^2}{4\pi^2} = \dfrac{M}{k} \\ T = 2\pi\sqrt{\dfrac{M + m}{k}} \Rightarrow \dfrac{T^2}{4\pi^2} = \dfrac{M + m}{k} \end{cases} \Rightarrow m = ?$



1.2.2 Con lắc dao động trong hệ quy chiếu phi quán tính

Phương pháp

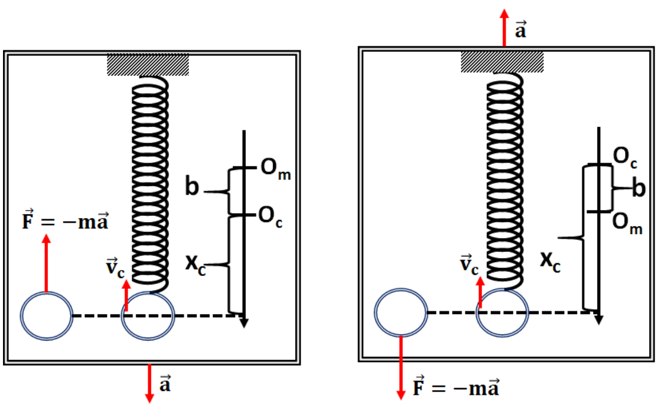


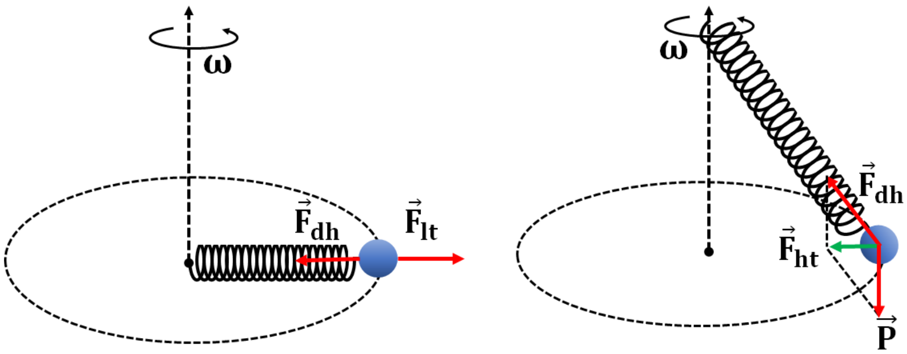
Khi hệ quy chiếu chuyển động thẳng biến đổi đều với gia tốc $\vec{a}$ thì vật dao động của con lắc chịu thêm một lực quán tính $\vec{F}_{qt} = -m\vec{a}$. Còn nếu hệ quy chiếu quay đều với tốc độ góc ω thì chịu thêm lực li tâm có hướng ra tâm và có độ lớn: $F_{lt} = \dfrac{mv^2}{r} = m\omega^2 r$

Kinh nghiệm: Con lắc lò xo treo trong thang máy đứng yên, đang dao động điều hòa theo phương thẳng đứng, đúng lúc nó có li độ x_c (vận tốc $v_c = \sqrt{A^2 - x_c^2}$ nếu vật đang đi theo chiều dương và vận tốc $v_c = -\sqrt{A^2 - x_c^2}$ nếu vật đang đi theo chiều âm) thì thang máy chuyển động biến đổi đều với gia tốc $\vec{a}$. Khi đó, vật dao động chịu thêm lực quán tính $\vec{F}_{qt} = -m\vec{a}$ nên VTCB mới dịch theo hướng của $\vec{F}_{qt}$ một đoạn $b = \dfrac{F_{qt}}{k}$. Ngay tại lúc này, đối với gốc tọa độ mới, vật có li độ và vận tốc:

$$\begin{cases} x_m = x_c \pm b \\ v_m = v_c \end{cases} \Rightarrow A_m = \sqrt{x_m^2 + \frac{v_m^2}{\omega^2}}$$

(Lấy $+b$ khi $\vec{F}_{qt}$ hướng theo chiều âm và $-b$ khi $\vec{F}_{qt}$ hướng theo chiều dương)





Chú ý: Nếu tính được tốc độ góc ω thì góc quay được, số vòng quay được tron thời gian Δt lần lượt là: $\begin{cases} \Delta\varphi = \omega\Delta t \\ n = \dfrac{\Delta\varphi}{2\pi} = \dfrac{\omega\Delta t}{2\pi} \end{cases}$

Quy trình giải nhanh: $\begin{cases} \Delta l_0 = \dfrac{mg}{k\cos\alpha} \\ \omega = \sqrt{\dfrac{g}{(l_0+\Delta l_0)\cos\alpha}} \end{cases} \Rightarrow n = \dfrac{\Delta\varphi}{2\pi} = \dfrac{\omega\Delta t}{2\pi}$

1.2.3 Bài toán liên quan đến cơ năng, thế năng, động năng

Phương pháp

$$x = A\cos(\omega t+\varphi)$$
$$v = -\omega A\sin(\omega t+\varphi)$$
$$\begin{cases} W_t = \dfrac{kx^2}{2} = \dfrac{kA^2}{2}\cos^2(\omega t+\varphi) = \dfrac{kA^2}{4}\left[1+2\cos(2\omega t+2\varphi)\right] \\ W_d = \dfrac{mv^2}{2} = \dfrac{m\omega^2A^2}{2}\sin^2(\omega t+\varphi) = \dfrac{kA^2}{4}\left[1-2\cos(2\omega t+2\varphi)\right] \end{cases} \to \begin{cases} \omega' = 2\omega \\ f' = 2f \\ T' = \dfrac{T}{2} \end{cases}$$
$$T = \frac{\Delta t}{n};\ \omega = \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$
$$W = W_t + W_d = \frac{kx^2}{2} + \frac{mv^2}{2} = \frac{m\omega^2A^2}{2} = \frac{kA^2}{2} = \frac{mv_{\max}^2}{2}$$
$$\begin{cases} k = m\omega^2 \\ a = -\omega^2 x \Rightarrow x = -\dfrac{a}{\omega^2} = -\dfrac{ma}{k} \end{cases} \Rightarrow W = \frac{(ma)^2}{2k} + \frac{mv^2}{2}$$

Chú ý

1. Với bài toán cho biết W , v, x hoặc a yêu cầu tìm A thì trước tiên ta tính k trước (nếu chưa biết) rồi mới tính A: $\begin{cases} W = \dfrac{kx^2}{2} + \dfrac{mv^2}{2} = \dfrac{kA^2}{2} = \dfrac{m\omega^2A^2}{2} \\ W = \dfrac{(ma)^2}{2k} + \dfrac{mv^2}{2} \end{cases} \Rightarrow k = ? \Rightarrow A = \sqrt{\dfrac{2W}{k}}$

2. Với bài toán cho biết W , v_0, a_0 yêu cầu tìm ω, φ thì trước ta tính ωA.

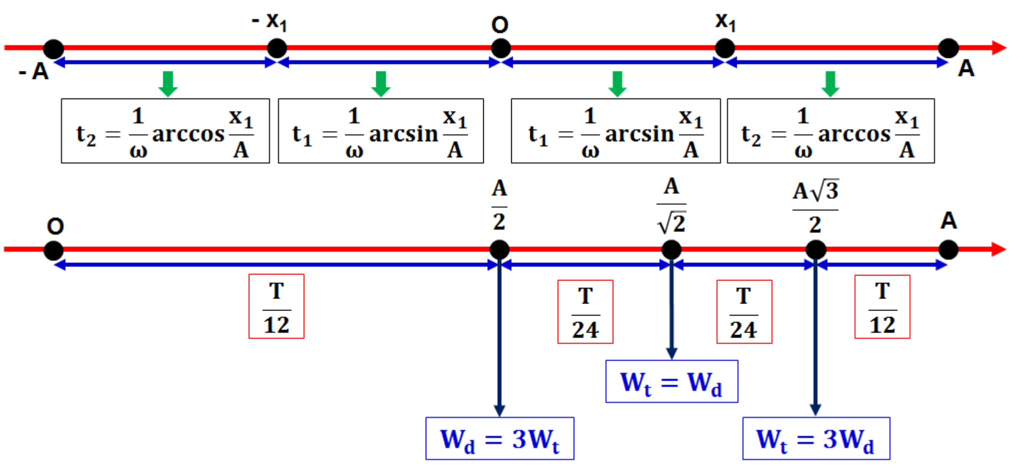
$$\begin{cases} W = \dfrac{m\omega^2 A^2}{2} \Rightarrow \omega A = \sqrt{\dfrac{2W}{m}} = ? \\ \begin{cases} v = -\omega A \sin(\omega t + \varphi) \\ a = -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi) \end{cases} \xrightarrow{t=0} \begin{cases} v_0 = -\omega A \sin\varphi \\ a_0 = -\omega^2 A \cos\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega = ? \\ \varphi = ? \end{cases} \end{cases}$$

1.2.4 Khoảng thời gian liên quan đến cơ năng, thế năng, động năng

Phương pháp

Nếu $W_t = nW_d$ thì toàn bộ $(n+1)$ phần: thế năng chiếm "chiếm n phần" và động năng "chiếm 1 phần"

$$W_t = nW_d \Rightarrow \begin{cases} W_t = \dfrac{n}{n+1}W \Rightarrow \dfrac{kx^2}{2} = \dfrac{n}{n+1}\dfrac{kA^2}{2} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\dfrac{n}{n+1}}A = \pm x_1 \\ W_d = \dfrac{1}{n+1}W \end{cases}$$

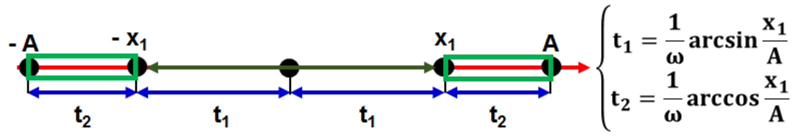


Khoảng thời gian hai lần liên tiếp $W_t = nW_d$ là $2t_1$ hoặc $2t_2$

* Nếu $n = 1$ $\left(\dfrac{x_1}{A} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \approx 0,71\right)$ thì $2t_1 = 2t_2 = \dfrac{T}{4}$

* Nếu $n > 1$ $\left(\dfrac{x_1}{A} > \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \approx 0,71\right)$ thì $2t_1 > \dfrac{T}{4}$, $2t_2 < \dfrac{T}{4} \Rightarrow \Delta t_{\min} = 2t_2$.

* Nếu $n < 1$ $\left(\dfrac{x_1}{A} < \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \approx 0,71\right)$ thì $2t_1 < \dfrac{T}{4}$, $2t_2 > \dfrac{T}{4} \Rightarrow \Delta t_{\min} = 2t_1$.



Chú ý: Với bài toán cho biết khoảng thời gian, yêu cầu tìm W thì làm theo quy trình sau: $\Delta t =? \Rightarrow T =? \Rightarrow \omega = \dfrac{2\pi}{T} \Rightarrow W = \dfrac{m\omega^2 A^2}{2}$

Chú ý

* Khoảng thời gian 2 lần liên tiếp các đại lượng x, v, a, F , p, W_t, $W_đ$ bằng 0 hoặc có độ lớn cực đại là $\dfrac{T}{2}$.
* Khoảng thời gian 2 lần liên tiếp $W_t = W_đ$ là $\dfrac{T}{4}$
* Nếu lúc đầu vật ở vị trí biên hoặc vị trí cân bằng thì cứ sau khoảng thời gian ngắn nhất $\dfrac{T}{2}$ vật lại các vị trí cân bằng một khoảng như cũ.
* Nếu lúc đầu vật cách vị trí cân bằng một khoảng x_0 mà cứ sau khoảng thời gian ngắn nhất Δt $(\Delta t < T)$ vật lại cách vị trí cân băng một khoảng như cũ thì $x_0 = \dfrac{A}{\sqrt{2}}$ và $\Delta t = \dfrac{T}{4}$.

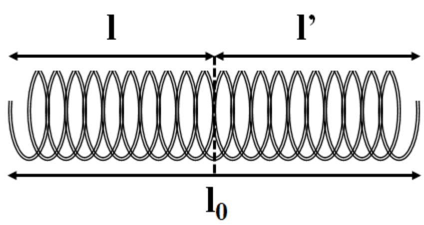
1.2.5 Bài toán liên quan đến cắt lò xo

Phương pháp

Giả sử lò xo có cấu tạo đồng đều, chiều dài tự nhiên l_0, độ cứng k_0 được cắt thành các lò xo khác nhau.

$$k = E\frac{S}{l} \Rightarrow kl = ES = \text{const}\begin{cases} k_0l_0 = k_1l_1 = k_2l_2 = \ldots = k_nl_n \\ l = l_1 + l_2 + \cdots + l_n \end{cases}$$

Nếu cắt thành 2 lò xo: $k_0l_0 = kl = k'l' \Rightarrow \begin{cases} k = \dfrac{l_0}{l}k_0 \\ k' = \dfrac{l_0}{l'}k_0 \end{cases}$



Nếu lò xo cắt thành n phần bằng nhau:

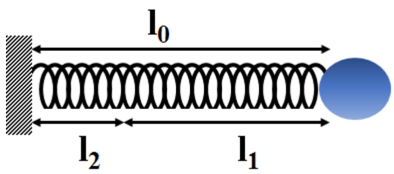
$$l_1 = l_2 = \ldots = l_n = \frac{l_0}{n} \Rightarrow k_1 = k_2 = \ldots = k_n = nk_0 \begin{cases} \omega,\ f \text{ tăng } \sqrt{n} \text{ lần} \\ T \text{ giảm } \sqrt{n} \text{ lần} \end{cases}$$

1.2.6 Bài toán giữ một điểm cố định của con lắc lò xo đang dao động

Phương pháp

1. Nếu đúng lúc con lắc đi qua vị trí cân bằng, giữ cố định một điểm trên lò xo thì sẽ không làm thay đổi cơ năng của hệ:

$$\begin{cases} k_1 l_1 = kl \Rightarrow k_1 = k\dfrac{l}{l_1} \Rightarrow f_1 = f\sqrt{\dfrac{l}{l_1}} \\ \dfrac{k_1 A_1^2}{2} = \dfrac{kA^2}{2} \Rightarrow A = A_1\sqrt{\dfrac{k}{k_1}} = A\sqrt{\dfrac{l_1}{l}} \end{cases}$$



2. Nếu đúng lúc con lắc đi qua vị trí li độ x, giữ cố định một điểm trên lò xo thì thế năng bị nhốt $W_{nhot} = \frac{l_2}{l}\frac{kx^2}{2}$ nên cơ năng còn lại:

$$W' = W - W_{nhot} \Leftrightarrow \frac{k_1 A_1^2}{2} = \frac{kA^2}{2} - \frac{l_2}{l}\frac{kx^2}{2} \left(k_1 l_1 = k_2 l_2 \Rightarrow k_1 = k\frac{l}{l_1}\right)$$

Quy trình giải nhanh

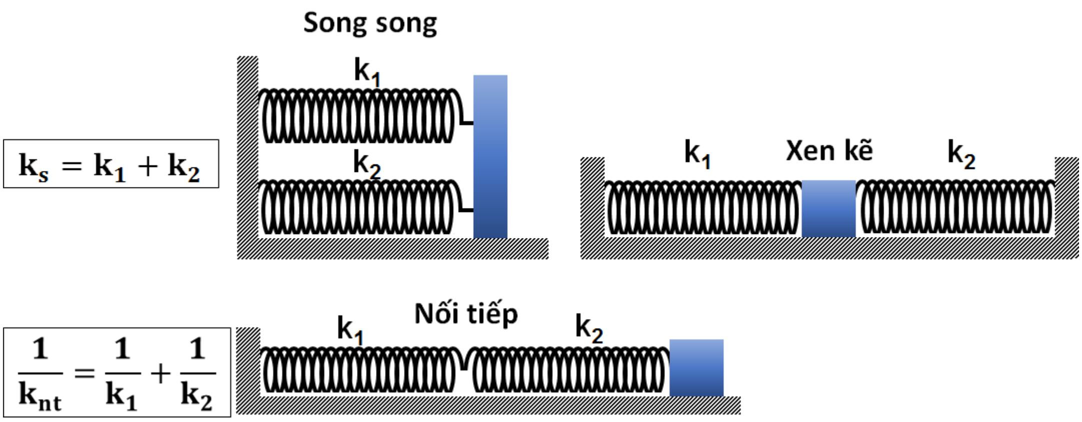
- Tại thời điểm giữ cố định $x = \pm\frac{A}{n}$ nên thế năng lúc này $W_t = \frac{W}{n^2}$
- Phần thế năng bị nhốt:$W_{nhot} = \frac{l_{nhot}}{l}W_t = \frac{l_{nhot}}{l}\frac{W}{n^2}$

- Cơ năng còn lại:

$$W' = W - W_{nhot} = W\left(l - \frac{l_{nhot}}{l.n^2}\right) \Rightarrow \frac{k'A'^2}{2}\left(l - \frac{l_{nhot}}{l.n^2}\right)$$
$$\Rightarrow A' = A\sqrt{\frac{k}{k'}\left(l - \frac{l_{nhot}}{l.n^2}\right)} = A\sqrt{\frac{l_{con\_lai}}{l}}\left(l - \frac{l_{nhot}}{l.n^2}\right)$$

1.2.7 Bài toán liên quan đến ghép lò xo

Phương pháp



* Ghép nối tiếp: $\frac{1}{k_{nt}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$.

*Ghép song song: $k_s = k_1 + k_2$

* Nếu một vật có khối lượng m lần lượt liên kết với các lò xo khác thì hệ thức liên hệ:

$$\begin{cases} T_{nt}^2 = T_1^2 + T_2^2 + \cdots \\ \frac{1}{T_s^2} = \frac{1}{T_1^2} + \frac{1}{T_2^2} + \cdots \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{f_{nt}^2} = \frac{1}{f_1^2} + \frac{1}{f_2^2} + \cdots \\ f_s^2 = f_1^2 + f_2^2 + \cdots \end{cases}$$

Chú ý

1. Nếu đúng lúc con lắc đi qua vị trí cân bằng, ghép thêm lò xo thì sẽ không làm thay đổi cơ năng của hệ:

$$\frac{k_s A_s^2}{2} = \frac{k_t A_t^2}{2} \Rightarrow A_s = A_t\sqrt{\frac{k_t}{k_s}} \begin{cases} \frac{1}{k_{nt}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \cdots \\ k_s = k_1 + k_2 + \cdots \end{cases}$$

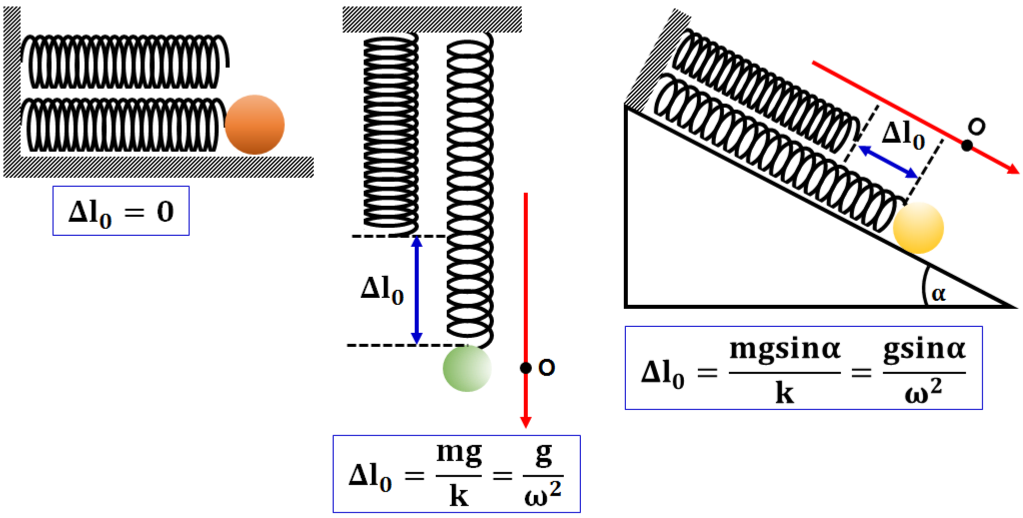
2. Nếu đúng lúc con lắc đi qua vị trí có li độ x, một lò xo không còn tham gia dao động thì phần năng lượng bị mất đúng bằng thế năng đàn hồi của lò xo bị mất.

1.2.8 Bài toán liên quan đến chiều dài lò xo

Phương pháp

Xét trường hợp vật ở dưới

$$\begin{cases} \text{Tại VTCB: } l_{CB} = l_0 + \Delta l_0 \\ \text{Tại VT li độ x: } l = l_{CB} + x \begin{cases} l_{\max} = l_{CB} + A \\ l_{\min} = l_{CB} - A \end{cases} \end{cases}$$



$+$ $A \leq \Delta l_0 \Rightarrow$ Khi dao động lò xo luôn dãn

- Dãn ít nhất (khi vật cao nhất): $\Delta l_0 - A$
- Dãn nhiều nhất (khi vật thấp nhất): $\Delta l_0 + A$

$+$ $A > \Delta l_0 \Rightarrow$ Khi dao động lò xo có lúc dãn, có lúc nén.

- Nén nhiều nhất (khi vật cao nhất): $A - \Delta l_0$
- Không biến dạng khi: $x = -\Delta l_0$
- Dãn nhiều nhất (khi vật thấp nhất): $\Delta l_0 + A$

Chú ý

1. Khi lò xo có độ dãn Δl thì độ lớn li độ là: $|x_0| = |\Delta l - \Delta l_0|$

2. Từ các công thức $x^2 + \dfrac{v^2}{\omega^2} = A^2$; $a = -\omega^2 x$ suy ra $\dfrac{a^2}{\omega^4} + \dfrac{v^2}{\omega^2} = A^2$

3. Khi vật có tốc độ bằng không và lò xo không biến dạng thì $A = \Delta l_0$

$$A = \Delta l_0 = \left[\begin{array}{l} \dfrac{mg}{k} = \dfrac{g}{\omega^2} \Rightarrow \omega = \sqrt{\dfrac{g}{\Delta l_0}} \\ \dfrac{mg\sin\alpha}{k} = \dfrac{g\sin\alpha}{\omega^2} \Rightarrow \omega = \sqrt{\dfrac{g\sin\alpha}{\Delta l_0}} \end{array}\right. \Rightarrow v_{cb} = \omega A$$

$$\left.\begin{array}{l} x = -\dfrac{a}{\omega^2} \\ x^2 + \dfrac{v^2}{\omega^2} = A^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{a^2}{\omega^4} + \frac{v^2}{\omega^2} = A^2 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \dfrac{a^2}{\omega^4} + \dfrac{v^2}{\omega^2} = \dfrac{g^2}{\omega^4} \\ \dfrac{a^2}{\omega^4} + \dfrac{v^2}{\omega^2} = \dfrac{g^2 \sin^2\alpha}{\omega^4} \end{array}\right.$$

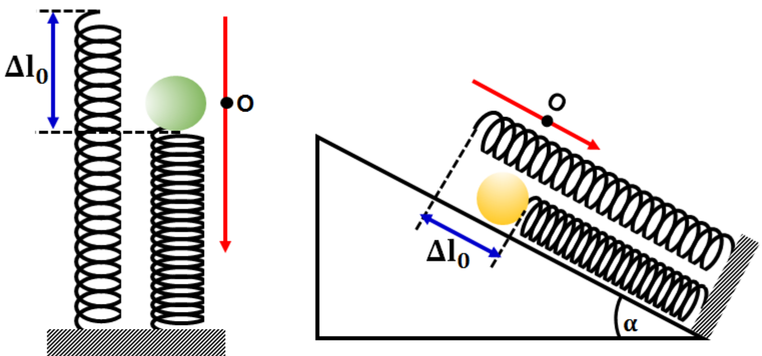
Xét trường hợp vật ở trên: lúc này khi vật ở VTCB, lò xo bị nén: Δl_0

\+ Nếu $A \leq \Delta l_0$ thì trong quá tình dao động lò xo luôn luôn bị nén

- Nén nhiều nhất: $\Delta l_0 + A$
- Nén ít nhất: $\Delta l_0 - A$

\+ Nếu $A > \Delta l_0$ thì khi ở vị trí

- thấp nhất lò xo nén nhiều nhất: $A + \Delta l_0$
- cao nhất lò xo dãn nhiều nhất: $A - \Delta l_0$



$\Delta l_0 = \dfrac{mg}{k} = \dfrac{g}{\omega^2}$ $\Delta l_0 = \dfrac{mg\sin\alpha}{k} = \dfrac{g\sin\alpha}{\omega^2}$

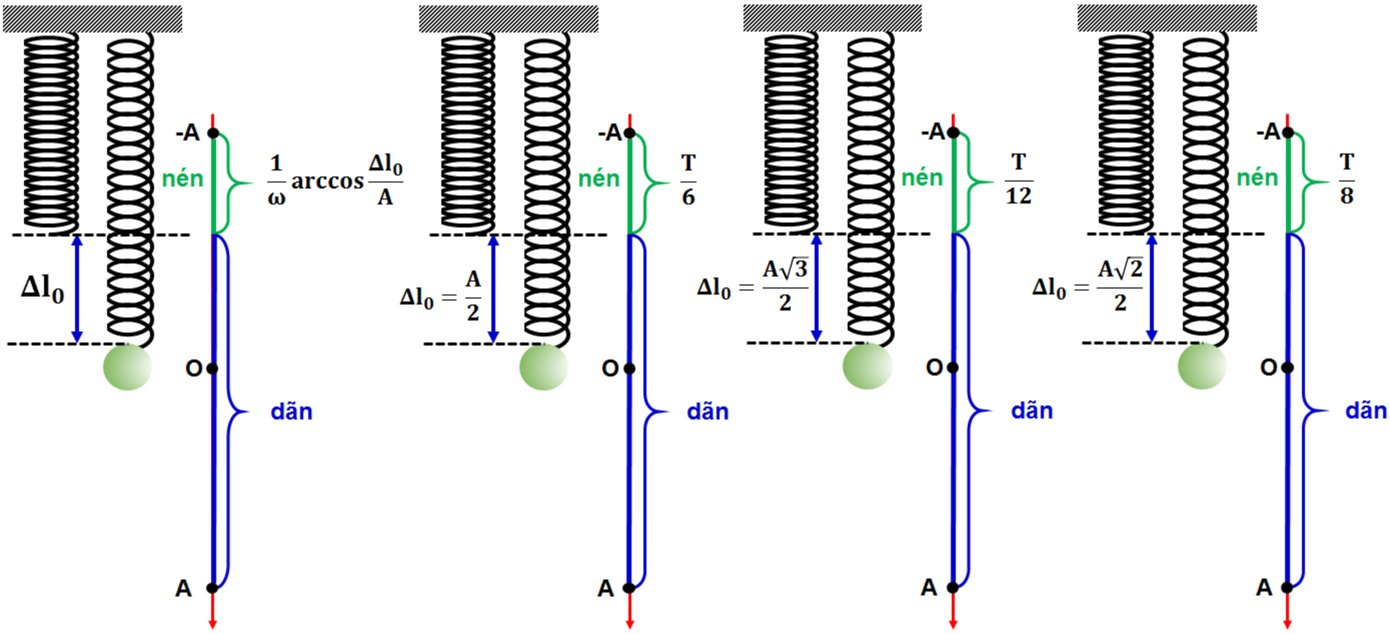
1.2.9 Bài toán liên quan đến thời gian lò xo nén dãn

Phương pháp

Nếu $A \leq \Delta l_0$ thì trong quá trình dao động lò xo luôn luôn dãn. Vì vậy, ta chỉ xét trườnghợp $A > \Delta l_0$.

Trong một chu kì, thời gian lo xo nén, thời gian lò xo dãn lần lượt là:

$$\begin{cases} t_{\text{nén}} = 2\dfrac{1}{\omega}\arccos\dfrac{\Delta l_0}{A} = \dfrac{T}{\pi}\arccos\dfrac{\Delta l_0}{A} \\ t_{\text{dãn}} = T - 2\dfrac{1}{\omega}\arccos\dfrac{\Delta l_0}{A} = T - \dfrac{T}{\pi}\arccos\dfrac{\Delta l_0}{A} \end{cases}$$



Kinh nghiệm: Trong các đề thi hiện hành phổ biến là trường hợp $\Delta l_0 = \dfrac{A}{2}$. Lúc này, trong 1 chu kì, thời gian lò xo nén là $\dfrac{T}{3}$ và thời gian lò xo dãn là $\dfrac{2T}{3}$.

Chú ý: Trường hợp vật ở trên thì ngược lại.

Nếu $A \leq \Delta l_0$ thì trong quá trình dao động lò xo luôn luôn nén. Vì vậy, ta chỉ xét trường hợp $A > \Delta l_0$.

Trong một chu kì, thời gian lo xo dãn, thời gian lò xo nén lần lượt là:

$$\begin{cases} t_{\text{dãn}} = 2\dfrac{1}{\omega}\arccos\dfrac{\Delta l_0}{A} = \dfrac{T}{\pi}\arccos\dfrac{\Delta l_0}{A} \\ t_{\text{nén}} = T - 2\dfrac{1}{\omega}\arccos\dfrac{\Delta l_0}{A} = T - \dfrac{T}{\pi}\arccos\dfrac{\Delta l_0}{A} \end{cases}$$

1.2.10 Bài toán liên quan đến lực đàn hồi kéo về

Phương pháp

- Lực kéo về luôn có xu hướng đưa vật về VTCB và có độ lớn tỉ lệ với li độ ($F = k|x|$).

- Lực đàn hồi luôn có xu hướng đưa vật về vị trí lò xo không biến dạng, có độ lớn tỉ lệ với độ biến dạng của lò xo ($F_{dh} = k|\Delta l|$)

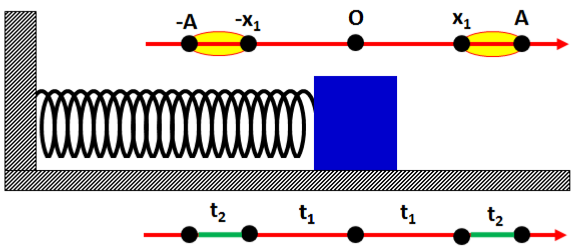
1.2.11 Con lắc lò xo dao động theo phương ngang

Phương pháp

Với con lắc lò xo nằm ngang thì lực hồi phục và lực đàn hồi là một (vì tại VTCB lò xo không biến dạng)

$$\begin{aligned}
&|\Delta l| = |x| \Rightarrow F_{dh} = k\,|\Delta l| = k\,|x| \\
&x = A\cos(\omega t + \varphi) \Rightarrow F_{dh\,\max} = F_{\max} = kA = m\omega^2 A \\
&x^2 + \frac{v^2}{\omega^2} = A^2 \begin{cases} |x| = \dfrac{F}{k} \\ v = \dfrac{p}{m} \end{cases}
\end{aligned}$$

Chú ý: Khi lò xo dãn, lực đàn hồi là lực kéo; khi lò xo nén, lực đàn hồi là lực đẩy. Trong một chu kì T, thời gian lò xo nén bằng thời gian lò xo dãn bằng $\frac{T}{2}$. Trong các trường hợp khác, ta vẽ trục tọa độ để xác định thời gian lò xo nén dãn.



$$\begin{cases} t_1 = \dfrac{1}{\omega}\arcsin\dfrac{x_1}{A} \\ t_2 = \dfrac{1}{\omega}\arccos\dfrac{x_1}{A} \end{cases}$$

- Độ lớn **lực đàn hồi** lớn hơn $F1 = kx_1$ thì vật nằm ngoài khoảng $(-x_1, x_1)$, ứng với thời gian trong một chu kì là $4t_2$.
- Độ lớn **lực đàn hồi** nhỏ hơn $F1 = kx_1$ thì vật nằm trong khoảng $(-x_1, x_1)$, ứng với thời gian trong một chu kì là $4t_1$.
- Độ lớn **lực kéo** nhỏ hơn $F_1 = kx_1$ thì vật nằm trong khoảng $(0, x_1)$, ứng với thời gian trong một chu kì là $2t_1$.
- Độ lớn **lực kéo** lớn hơn $F_1 = kx_1$ thì vật nằm trong khoảng (x_1, A), ứng với thời gian trong một chu kì là $2t_2$.
- Độ lớn **lực đẩy** nhỏ hơn $F_1 = kx_1$ thì vật nằm trong khoảng $(-x_1, 0)$, ứng với thời gian trong một chu kì là $2t_1$.

- Độ lớn **lực đẩy** lớn hơn $F_1 = kx_1$ thì vật nằm trong khoảng $(-A, -x_1)$, ứng với thời gian trong một chu kì là $2t_2$.

1.2.12 Con lắc lò xo dao động theo phương thẳng đứng, xiên

Phương pháp

Trường hợp vật ở dưới

Với con lắc lò xo thẳng đứng hoặc đặt trên mặt phẳng nghiêng , gọi Δl_0 là độ biến dạng của lò xo ở VTCB.

+ Khi chọn chiều dương hướng xuống dưới thì biểu thức lực đàn hồi lúc vật có li độ x:

$$F_{dh} = k.\Delta l = k\left(\Lambda l_0 + x\right)\begin{cases} > 0\text{Lò xo dãn} \Rightarrow \text{Lực đàn hồi là lực kéo} \\ < 0\text{Lò xo nén} \Rightarrow \text{Lực đàn hồi là lực đẩy} \end{cases}$$

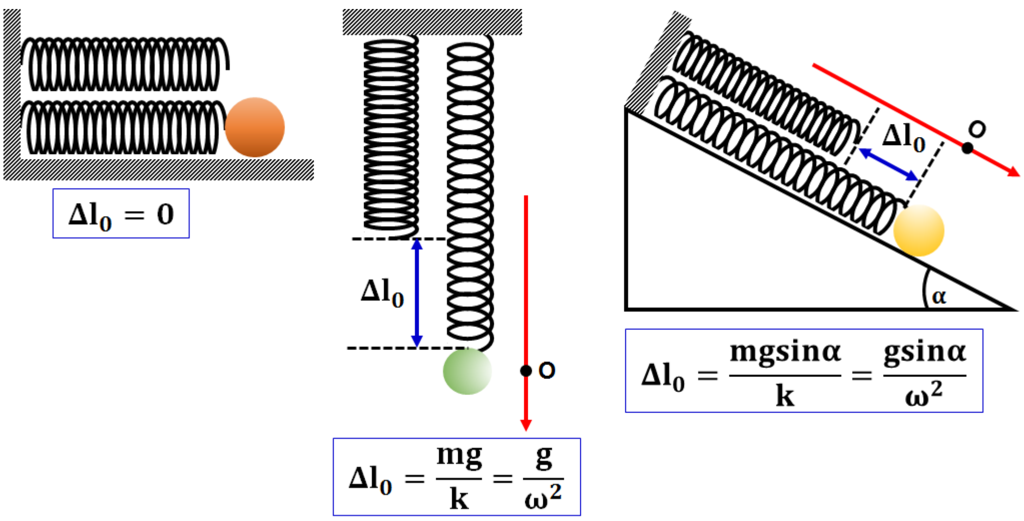
(Khi chọn chiều dương hướng lên thì $F_{dh} = k.\Delta l = k(\Delta l_0 - x)$)

+ Lực đàn hồi cực đại (là lực kéo): $Fmax = k(\Delta l_0 + A) = F_{K\max}$ (lúc vật ở vị trí thấp nhất)

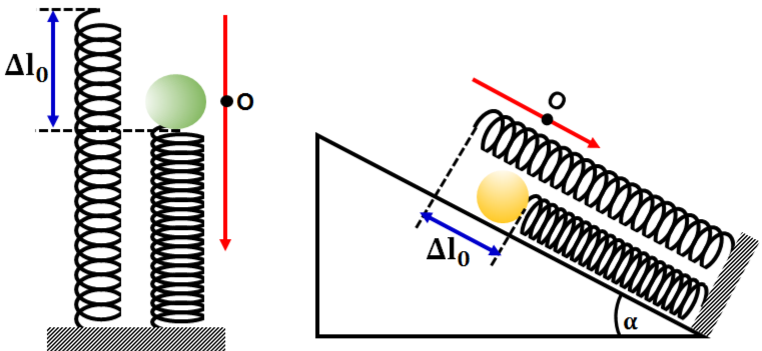
+ Lực đàn hồi cực tiểu

  - Nếu $A < \Delta l_0 \Rightarrow F_{\min} = k(\Delta l_0 - A) = F_{K\min}$ (là lực kéo)

  - Nếu $A \geq \Delta l_0 \Rightarrow F_{\min} = 0$ (lúc vật qua vị trí lò xo không biến dạng)



+ Lực đẩy (lực nén) đàn hồi cực đại: $F_{N\max} = k(A - \Delta l_0)$ (lúc vật ở vị trí cao nhất)



$$\Delta l_0 = \frac{mg}{k} = \frac{g}{\omega^2} \qquad \Delta l_0 = \frac{mg\sin\alpha}{k} = \frac{g\sin\alpha}{\omega^2}$$

Trường hợp vật ở trên

$$\begin{cases} l_{CB} = l_0 - \Delta l_0 \\ l_{\min} = l_0 - \Delta l_0 - A \\ l_{\max} = l_0 - \Delta l_0 + A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{l_{\max} - l_{\min}}{2} \\ l_{CB} = \dfrac{l_{\max} + l_{\min}}{2} \end{cases}$$

1. Để tính lực đàn hồi cực đại, cực tiểu, ta làm như sau:

$$\begin{cases} F_{\max} = k\left(\Delta l_0 + A\right) \\ F_{\text{điểm cao nhất}} = k\left(\Delta l_0 - A\right) \Rightarrow \begin{cases} > 0 \Rightarrow F_{\min} = k\left(\Delta l_0 - A\right) \\ \leq 0 \Rightarrow \begin{cases} F_{\min} = 0 \\ F_{nen\max} = k\left(A - \Delta l_0\right) \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

2. Nếu $A \leq \Delta l_0$ thì trong quá trình dao động lò xo luôn dãn (lực đàn hồi luôn là lực kéo $F_{keo\max} = k(\Delta l_0 + A)$; $F_{keo\min} = k(\Delta l_0 - A)$)

3. Nếu $A > \Delta l_0$ thì trong quá trình dao động lò xo có lúc dãn, có lúc nén và có lúc không biến dạng.

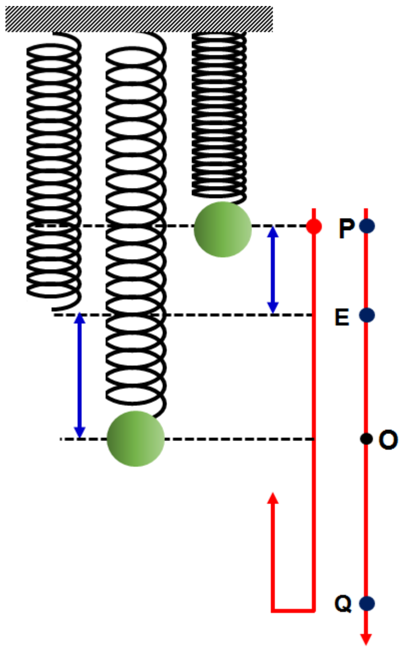
$$A > \Delta l_0 \Rightarrow \begin{cases} \text{Vị trí thấp nhất }: F_{TN} = k\left(\Delta l_0 + A\right) \\ \text{Vị trí cao nhất: } F_{CN} = k\left(\Delta l_0 - A\right) < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Lực kéo cực đại: } F_{keo\max} = k\left(\Delta l_0 + A\right) \\ \text{Lực nén cực đại: } F_{nen\max} = k\left(\Delta l_0 - A\right) \end{cases}$$

4. $$\begin{cases} A \leq \Delta l_0 \Rightarrow \begin{cases} F_{\max} = F_{keo\max} = k\left(\Delta l_0 + A\right) \\ F_{\min} = F_{keo\min} = k\left(\Delta l_0 - A\right) \end{cases} \Rightarrow \dfrac{F_{\max}}{F_{\min}} = \dfrac{\Delta l_0 + A}{\Delta l_0 - A} \\ A > \Delta l_0 \Rightarrow \begin{cases} F_{\max} = F_{keo\max} = k\left(\Delta l_0 + A\right) \\ F_{\min} = 0 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{F_{\max}}{F_{\min}} = \infty \end{cases}$$

5. Hướng của lực đàn hồi và lực hồi phục

- Trong đoạn PE lực đàn hồi và lực hồi phục (lực kéo về) đều hướng xuống.
- Trong đoạn EO lực đàn hồi hướng lên và lực hồi phục (lực kéo về) hướng xuống.
- Trong đoạn OQ lực đàn hồi và lực hồi phục (lực kéo về) đều hướng lên.



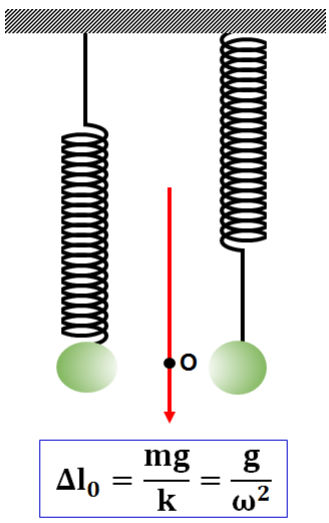
1.2.13 Bài toán liên quan đến sợi dây trong cơ hệ

Phương pháp

Muốn hệ dao động điều hòa thì sơi dây phải luôn căng, muốn vậy lò xo phải luôn dãn, tức là $A \leq \Delta l_0 = \dfrac{mg}{k}$.

Lực căng sơi dây luôn bằng độ lớn lực đàn hồi (lực kéo):

$$R = k\Delta l = k\left(\Delta l_0 + x\right)$$
$$\Rightarrow \begin{cases} R_{\min} = k\left(\Delta l_0 - A\right) = mg - kA \\ R_{\max} = k\left(\Delta l_0 + A\right) = mg + kA \end{cases}$$



Nếu sợi dây chỉ chịu được lực kéo tối đa F_0 thì điều kiện để sơi dây không đứt là $R_{\max} \leq F_0$

Chú ý: Nếu $A \leq \Delta l_0$ thì hệ hai vật luôn dao động điều hòa; còn nếu $A > \Delta l_0$ thì vật chuyển động giống như vật ném thẳng đứng từ dưới lên.

1.2.14 Bài toán kích thích dao động bằng va chạm theo phương ngang

Phương pháp

* Vật m chuyển động với vận tốc v_0 đến va chạm mềm vào vật M đang đứng yên thì:

$$\begin{cases} mv_0 = (m+M)\,V \Rightarrow V = \dfrac{mv_0}{m+M} \ \text{(Vận tốc của hệ ở VTCB)} \\ \text{Nếu sau va chạm cả hai vật đều dao động điều hòa thì: } \begin{cases} \omega = \sqrt{\dfrac{k}{m+M}} \\ A = \dfrac{V}{\omega} \end{cases} \end{cases}$$

* Vật m chuyển động với vận tốc v_0 đến va chạm đàn hồi vào vật M đang đứng yên thì ngay sau va chạm vận tốc của m và M lần lượt là v và V:

$$\begin{cases} \begin{cases} mv_0 = mv + MV \\ \dfrac{1}{2}mv_0^2 = \dfrac{1}{2}mv^2 + \dfrac{1}{2}MV^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V = \dfrac{2mv_0}{m+M} \ \text{(Vận tốc vật M ở VTCB)} \\ v = \dfrac{(m-M)\,v_0}{m+M} \end{cases} \\ \text{Nếu sau va chạm M dao động điều hòa thì: } \begin{cases} \omega = \sqrt{\dfrac{k}{M}} \\ A = \dfrac{V}{\omega} \end{cases} \end{cases}$$

Chú ý: Nếu con lắc lò xo đang dao động theo phương ngang với biên độ A_0 đúng lúc vật đến vị trí biên $(x_0 = \pm A_0)$ thì mới xảy ra va chạm thì:

$$\begin{cases} \text{Va chạm mềm: } \begin{cases} \omega = \sqrt{\dfrac{k}{m+M}} \\ V = \dfrac{mv_0}{m+M} \end{cases} \\ \text{Va chạm đàn hồi: } \begin{cases} \omega = \sqrt{\dfrac{k}{M}} \\ V = \dfrac{2mv_0}{m+M} \end{cases} \end{cases} \Rightarrow A = \sqrt{x^2 + \dfrac{V^2}{\omega^2}}$$

1.2.15 Bài toán kích thích dao động bằng va chạm theo phương thẳng đứng

Phương pháp

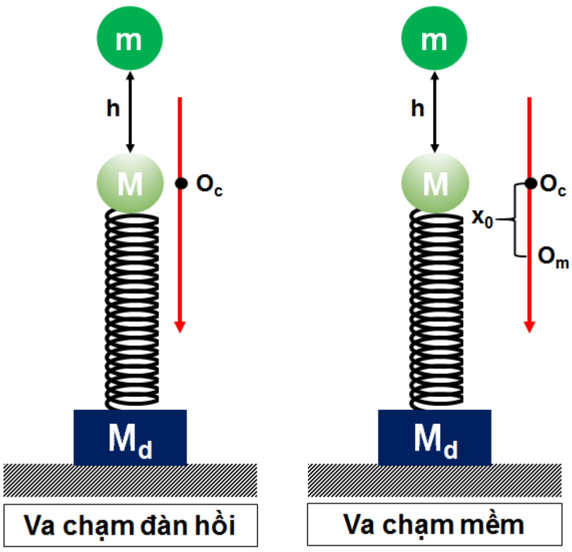
Tốc độ m ngay trước va chạm: $v_0 = \sqrt{2gh}$

* Nếu va chạm đàn hồi thì vị trí cân bằng không thay đổi

$$\begin{cases} mv_0 = mv + MV \\ \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V = \dfrac{2mv_0}{m+M} \text{ (ở VTCB)} \\ v = \left(\dfrac{m-M}{m+m}\right)v_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega = \sqrt{\dfrac{k}{M}} \\ A = \dfrac{V}{\omega} \end{cases}$$

* Nếu va chạm mềm thì vị trí cân bằng mới thấp hơn vị trí cân bằng cũ một đoạn $x_0 = \dfrac{mg}{k}$ và vận tốc hệ sau va chạm $V = \dfrac{mv_0}{m+M}$ (vận tốc của vật ở vị trí cách vị trí cân bằng mớimột đoạn x_0)

Biên độ sau va chạm: $A = \sqrt{x_0^2 + \dfrac{V^2}{\omega^2}}$ với $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m+M}}$



Chú ý

1. Nếu đầu dưới của lò xo gắn với M_d và $A \le \Delta l_0$ thì trong quá trình dao động lò xo luôn bị nén tức là lò xo luôn đẩy M_d nên vật M_d không bị nhấc lên. Nếu $A > \Delta l_0$ muốn M_d không bị nhấc lên thì lực kéo cực đại của lò xo (khi vật ở vị trí cao nhất lò xo dãn cực

đại $A - \Delta l_0$) không lớn hơn trọng lượng của M_d:

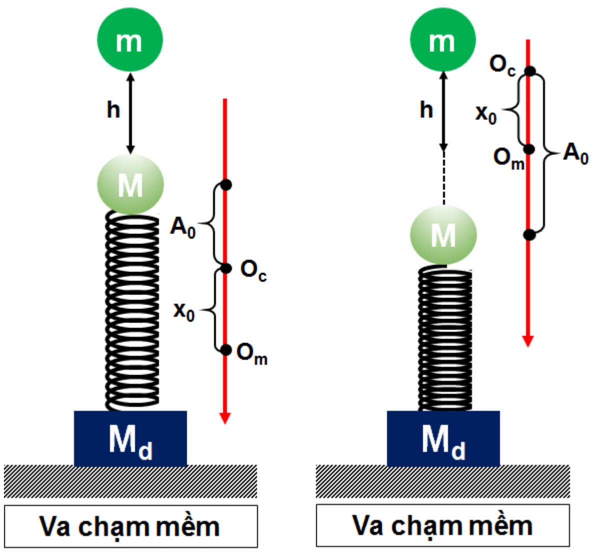
$$F_{\max} = k\left(A - \Delta l_0\right) = k\left(A - \frac{Mg}{k}\right) = kA - Mg \le M_d g$$

2. Nếu con lắc lò xo đang dao động theo phương thẳng đứng với biên độ A_0 đúng lúc vật đến vị trí biên ($x_0 = \pm A_0$) thì mới xảy ra va chạm đàn hồi thì:

$$\begin{cases} \omega = \sqrt{\dfrac{k}{M}} \\ V = \dfrac{2mv_0}{m+M} \end{cases} \Rightarrow A = \sqrt{x_0^2 + \frac{V^2}{\omega^2}}$$

3. Nếu con lắc lò xo đang dao động theo phương thẳng đứng với biên độ A_0 đúng lúc vật đến vị trí cao nhất thì mới xảy ra va chạm mềm thì ngay sau va chạm vật có li độ so với VTCB mới $(A_0 + x_0)$ và có vận tốc $V = \dfrac{mv_0}{m+M}$ nên biên độ mới:

$$A = \sqrt{\left(A_0 + x_0\right)^2 + \frac{V^2}{\omega^2}} \text{ (với) } \omega = \sqrt{\frac{k}{m+M}}$$



1.2.16 Bài toán kích thích dao động bằng cách cho một đầu của lò xo chuyển động đều

Phương pháp

Bài toán:

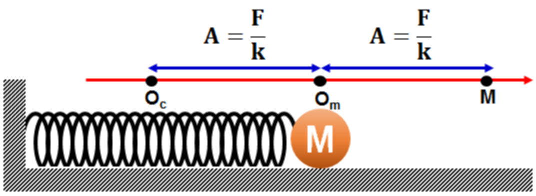
Một quả nặng có khối lượng m, nằm trên mặt phẳng nằm ngang, được gắn với lò xo nhẹ có độ cứng k lò xo theo phương thẳng đứng. Đầu tự do của lò xo bắt đầu được nâng lên thẳng đứng với vận tốc v không đổi. Xác định độ biến dạng cực đại của lò xo.

Hướng dẫn

Lúc đầu lò xo cứ dãn dần và khi vật m bắt đầu rời sàn thì lò xo dãn $\Delta l_0 = \dfrac{mg}{k}$, lúc này, có thể xem như vật ở vị trí cân bằng được truyền vận tốc v (hướng lên) và sau đó vật m dao động điều hòa với tần số góc $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$. Do đó, biên độ là $A = \dfrac{v}{\omega} = v\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ và độ dãn cực đại của lò xo là: $\Delta l + A = \dfrac{mg}{k} + v\sqrt{\dfrac{m}{k}}$

1.2.17 Bài toán kích thích dao động bằng lực

Phương pháp



* Nếu tác dụng ngoại lực F vào vật theo phương trùng với trục của lò xo trong khoảng thời gian $\Delta t \approx 0$ thì vật sẽ dao động xung quanh VTCB cũ O_c với biên độ: $A = \Delta l_0 = \dfrac{F}{k}$

* Nếu tác dụng ngoại lực vô cùng chậm trong khoảng thời gian Δt lớn thì vật đứng yên tại vị trí O_m cách VTCB cũ O_c một đoạn $\Delta l_0 = \dfrac{F}{k}$.

* Nếu thời gian tác dụng $\Delta t = (2n+1)\dfrac{T}{2}$ thì quá trình dao động được chia làm hai giai đoạn:

- Giai đoạn 1 ($0 < t < \Delta t$): Dao động với biên độ $A = \Delta l_0 = \dfrac{F}{k}$ xung quanh VTCB mới O_m
- Giai đoạn 2 ($t \geq \Delta t$): Đúng lúc vật đến M thì ngoại lực thôi tác dụng. Lúc nàyVTCB sẽ là O_c nên biên độ dao động $A' = 2\Delta l_0 = 2\dfrac{F}{k}$

* Nếu thời gian tác dụng $\Delta t = nT$ thì quá trình dao động được chia làm hai giai đoạn:

- Giai đoạn 1 ($0 < t < \Delta t$): Dao động với biên độ $A = \Delta l_0 = \dfrac{F}{k}$ xung quanh VTCB mới O_m.
- Giai đoạn 2 ($t \geq \Delta t$): Đúng lúc vật đến O_c với vận tốc bằng không thì ngoại lực thôi tác dụng. Lúc này VTCB sẽ là O_c nên vật đứng yên tại đó.

* Nếu thời gian tác dụng $\Delta t = (2n+1)\dfrac{T}{4}$ thì quá trình dao động được chia làm hai giai đoạn:

- Giai đoạn 1 ($0 < t < \Delta t$): Dao động với biên độ $A = \Delta l_0 = \dfrac{F}{k}$ xung quanh VTCB mới O_m.
- Giai đoạn 2 ($t \geq \Delta t$): Đúng lúc vật đến O_m với vận tốc bằng ωA thì ngoại lực thôi tác dụng. Lúc này VTCB sẽ là O_c nên vật có li độ A và biên độ mới là:

$$A' = \sqrt{A^2 + \frac{(\omega A)^2}{\omega^2}} = A\sqrt{2}$$

* Nếu thời gian tác dụng $\Delta t = nT + \dfrac{T}{4} + \dfrac{T}{12}$ thì quá trình dao động được chia làm hai giai đoạn:

- Giai đoạn 1 ($0 < t < \Delta t$): Dao động với biên độ $A = \Delta l_0 = \dfrac{F}{k}$ xung quanh VTCB mới O_m.
- Giai đoạn 2 ($t \geq \Delta t$): Đúng lúc vật có li độ đối với O_m là $\dfrac{A}{2}$ với vận tốc bằng $\dfrac{\omega A\sqrt{3}}{2}$ thì ngoại lực thôi tác dụng. Lúc này VTCB sẽ là O_c nên vật có li độ $\left(A + \dfrac{A}{2}\right)^2$ và biên độ mới là:

$$A' = \sqrt{\left(A + \frac{A}{2}\right)^2 + \frac{\left(\frac{\omega A\sqrt{3}}{2}\right)^2}{\omega^2}} = A\sqrt{3}$$

Quy trình giải nhanh

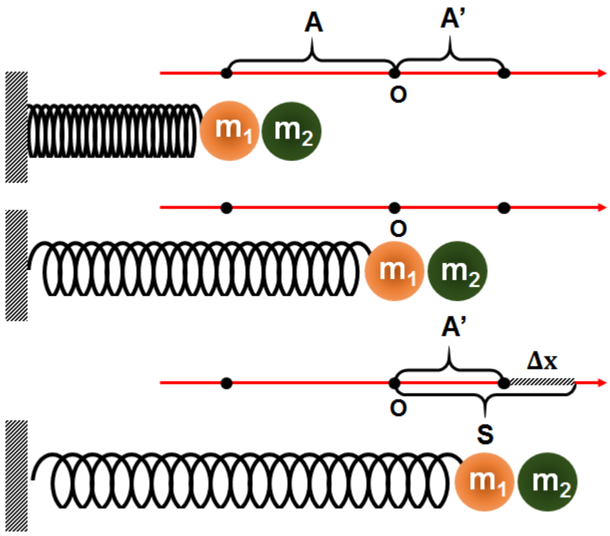
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\begin{cases} \Delta t \approx 0 \to A = \dfrac{F}{k} \\ \Delta t = (2n+1)\dfrac{T}{2} \to A' = 2\dfrac{F}{k} \\ \Delta t = nT \to A' = 0 \\ \Delta t = (2n+1)\dfrac{T}{4} \to A' = \dfrac{F}{k}\sqrt{2} \\ \Delta t = nT + \dfrac{T}{4} + \dfrac{T}{12} \to A' = \dfrac{F}{k}\sqrt{3} \end{cases}$$

Tương tự, cho các trường hợp: $\Delta t = nT + \frac{T}{4} + \frac{T}{8}$; $\Delta t = nT + \frac{T}{4} + \frac{T}{6}$;...

1.2.18 Bài toán hai vật cùng dao động theo phương ngang tách rời ở vị trí cân bằng

Phương pháp

- **Giai đoạn 1:** Cả hai vật cùng dao động với biên độ A, tần số góc $\omega = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}}$ và tốc độ cực đại $v_0 = \omega A$



- **Giai đoạn 2:** Nếu đến VTCB m_2 tách ra khỏi m_1 thì
  - m_1 dao động điều hòa với tần số góc $\omega = \sqrt{\frac{k}{m_1}}$ và biên độ $A' = \frac{v_0}{\omega'} = A\sqrt{\frac{m_1}{m_1 + m_2}}$
  - m_2 chuyển động thẳng đều với vận tốc v_0 và khi m_1 đến biên dương (lần 1) thì m_2 đi được quãng đường:

$$S = v_0\frac{T'}{4} = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}}A\frac{T}{4}2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k}} = \frac{\pi}{2}A\sqrt{\frac{m_1}{m_1 + m_2}}$$

Lúc này khoảng cách hai vật: $\Delta x = S - A' = A\sqrt{\frac{m_1}{m_1 + m_2}}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$

1.2.19 Bài toán hai vật cùng dao động theo phương ngang cất bớt vật (đặt thêm vật)

Phương pháp

- Cất bớt vật (đặt thêm vật) lúc tốc độ dao động bằng 0 sao cho không làm thay đổi biên độ:

$$A = A' \Rightarrow \frac{v'_{\max}}{v_{\max}} = \frac{\omega' A'}{\omega A} = \frac{\sqrt{\dfrac{k}{m}}}{\sqrt{\dfrac{k}{m+\Delta m}}} = \sqrt{\frac{m+\Delta m}{m}}$$

- Cất bớt vật (đặt thêm vật) lúc tốc độ dao động cực đại sao cho không làm thay đổi tốc độ cực đại:

$$v'_{\max} = v_{\max} \Rightarrow \frac{A'}{A} = \frac{\dfrac{v'_{\max}}{\omega'}}{\dfrac{v_{\max}}{\omega}} = \frac{\sqrt{\dfrac{k}{m+\Delta m}}}{\sqrt{\dfrac{k}{m}}} = \sqrt{\frac{m}{m+\Delta m}}$$

- Cất bớt vật (đặt thêm vật) lúc hệ có li độ x_1 (vận tốc v_1) sao cho không làm thay đổi vận tốc tức thời.

  Ngay trước lúc tác động:

$$A^2 = x_1^2 + \frac{v_1^2}{\omega^2} = x_1^2 + \left(\frac{m+\Delta m}{k}\right) v_1^2 \Rightarrow v_1^2 = \frac{k}{m+\Delta m}\left(A^2 - x_1^2\right)$$

  Ngay sau lúc tác động:

$$A' = \sqrt{x_1^2 + \frac{v_1^2}{\omega'^2}} = \sqrt{x_1^2 + (A^2 - x_1^2)\frac{m}{m+\Delta m}}$$

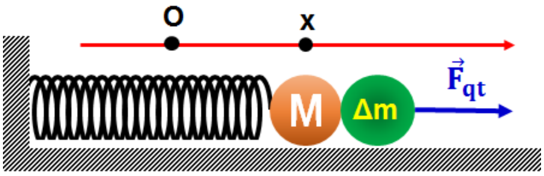
Chú ý:

Nếu khi vật m có li độ $x_1$và vận tốc v_1, vật m_0 rơi xuống dính chặt vào nhau thì xem như va chạm mềm và vận tốc của hai vật ngay sau va chạm: $V_1 = \dfrac{mv_1}{m+m_0}$. Cơ năng của hệ sau đó:

$$W' = \frac{kA'^2}{2} = \frac{(m+m_0)\,v_{\max}^2}{2} = \frac{kx_1^2}{2} + \frac{(m+m_0)\,V_1^2}{2}$$

1.2.20 Bài toán liên kết giữa hai vật theo phương ngang

Phương pháp



Để hai vật cùng dao động thì lực liên kết không nhỏ hơn lực quán tính cực đại:

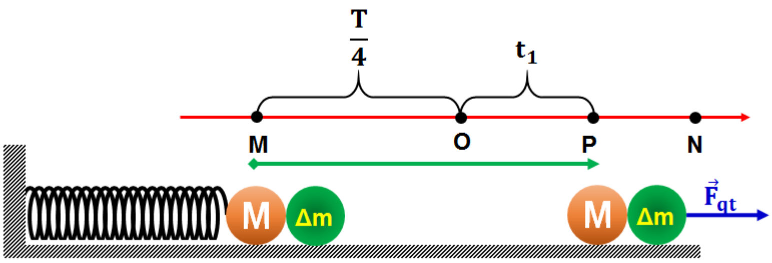
$$F_{lk} \geq F_{qt} = \Delta m\omega^2 A = \Delta m\frac{k}{m+\Delta m}A$$

Chú ý

1. Nếu điều kiện $F_{lk} \geq F_{qt\max} = \Delta m\frac{k}{m+\Delta m}A$ không được thỏa mãn thì vật Δm sẽ tách ra ở vị trí lần đầu tiên lực quán tính có xu hướng kéo rời (lò xo dãn) và lớn hơn hoặc bằng lực liên kết $F_{qt} = \Delta m\omega^2 x = \Delta m\frac{k}{m+\Delta m}x \geq F_{lk}$. Như vậy, vị trí tách rời chỉ có thể hoặc là vị trí ban đầu hoặc vị trí biên (lò xo đang dãn).

   Chẳng hạn, nếu lúc đầu lò xo nén cực đại rồi thả nhẹ, hai vật bắt đầu chuyển động từ M. Khi M đến O (lò xo nén), gia tốc hướng về vị trí cần bằng (theo chiều dương) nên lực quán tính tác dụng lên Δm hướng theo chiều âm và vật Δm không thể tách ra được. Sau khi qua O (lò xo dãn), gia tốc hướng theo chiều âm nên lực quán tính tác dụng lên Δm hướng theo chiều dương, tức là có xu hướng kéo Δm ra khỏi m. Lúc đầu, lực quán tính có độ lớn bé hơn lực liên kết nhưng sau đó độ lớn lực quán tính tăng dần. Khi đến P thì $F_{qt} = m\frac{k}{m+\Delta m}x = F_{lk} \Rightarrow x = F_{lk}\frac{m+\Delta m}{k.\Delta m}$ và vật tách ra tại điểm này.

   Thời gian đi từ M đến P: $t = \frac{T}{4} + t_1 = \frac{T}{4} + \frac{1}{\omega}\arcsin\frac{OP}{A} = \frac{T}{4} + \frac{T}{2\pi}\arcsin\frac{OP}{A}$



2. Khi Δm đặt trên m, muốn cho Δm không trượt trên m thì lực ma sát trượt không nhỏ hơn lực quán tính cực đại tác dụng lên Δm

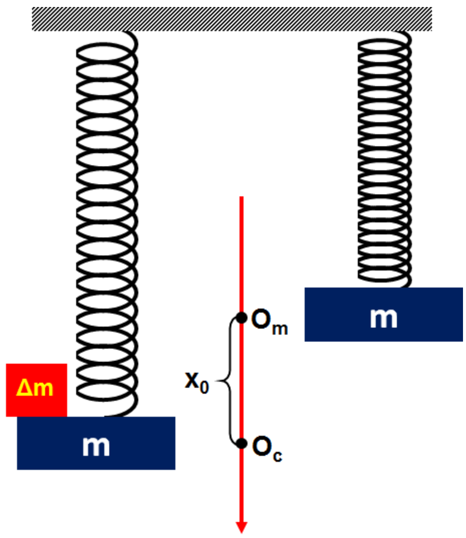
$$F_{ms} \geq F_{qt\max} \Rightarrow \mu \Delta m g \geq \Delta m \frac{k}{m+\Delta m} A \Rightarrow A \leq \frac{\mu g (m+\Delta m)}{k}$$

3. Khi hai vật không trượt lên nhau thì độ lớn lực ma sát nghỉ đúng bằng độ lớn lực tiếp tuyến mà lực tiếp tuyến ở đây là lực quán tính.

1.2.21 Các vật cùng dao động theo phương thẳng đứng thì cất bớt vật

Phương pháp

Giả sử lúc đầu hai vật $(m + \Delta m)$ gắn vào lò xo cùng dao động theo phương thẳng đứng xung quanh vị trí cân bằng cũ O_c với biên độ A_0 và với tần số góc $\omega = \sqrt{\frac{k}{m+\Delta m}}$, sau đó người ta cất vật Δm thì hệ dao động xung quanh vị trí cân bằng mới O_m với biên độ A và tần số góc $\omega' = \sqrt{\frac{k}{m}}$.Vị trí cân bằng mới cao hơn vị trí cân bằng cũ một đoạn: $x_0 = \frac{\Delta m g}{k}$.



Nếu ngay trước khi cất vật Δm hệ ở dưới vị trí cân bằng cũ một đoạn x_1 (tức là cách vị trí cân bằng mới một đoạn $x_1 + x_0$) thì:

$$\begin{cases} A^2 = x_1^2 + \frac{v_1^2}{\omega^2} = x_1^2 + \left(\frac{m+\Delta m}{k}\right) v_1^2 \Rightarrow v_1^2 = \left(A^2 - x_1^2\right) \frac{k}{m+\Delta m} \\ A'^2 = (x_1 + x_0)^2 + \frac{v_1^2}{\omega'^2} = (x_1+x_0)^2 + \left(\frac{m}{k}\right) v_1^2 \end{cases}$$
$$\Rightarrow A' = \sqrt{(x_1+x_0)^2 + (A^2 - x_1^2)\frac{m}{m+\Delta m}}$$

Đặc biệt, nếu $x_1 = A$ thì $A_0 = A + x_0$

Nếu ngay trước khi cất vật Δm hệ ở trên vị trí cân bằng cũ một đoạn x_1 (tức là cách vị trí cân bằng mới một đoạn $|x_1 - x_0|$ thì:

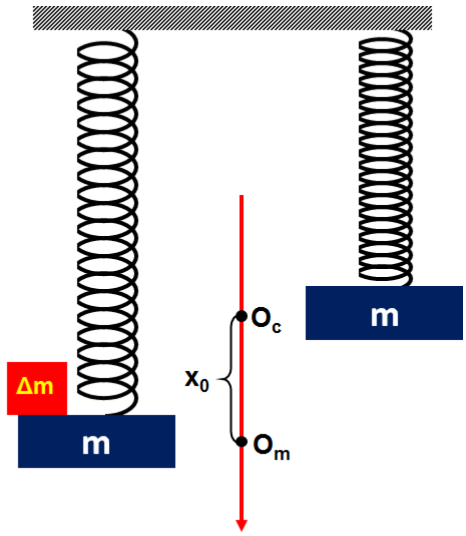
$$\begin{cases} A^2 = x_1^2 + \dfrac{v_1^2}{\omega^2} = x_1^2 + \left(\dfrac{m+\Delta m}{k}\right) v_1^2 \Rightarrow v_1^2 = \left(A^2 - x_1^2\right) \dfrac{k}{m+\Delta m} \\ A'^2 = \left(x_1 - x_0\right)^2 + \dfrac{v_1^2}{\omega'^2} = \left(x_1 - x_0\right)^2 + \left(\dfrac{m}{k}\right) v_1^2 \end{cases}$$
$$\Rightarrow A' = \sqrt{\left(x_1 - x_0\right)^2 + \left(A^2 - x_1^2\right) \dfrac{m}{m+\Delta m}}$$

Đặc biệt, nếu $x_1 = A$ thì $A_0 = |A - x_0|$

1.2.22 Các vật cùng dao động theo phương thẳng đứng thì đặt thêm vật

Phương pháp

Giả sử lúc đầu chỉ m gắn vào lò xo dao động theo phương thẳng đứng xung quanh vị trí cân bằng cũ O_c với biên độ A_0 và với tần số góc $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$, sau đó người ta đặt thêm vật Δm(có cùng tốc độ tức thời) thì hệ dao động xung quanh trí cân bằng mới Om với biên độ A và tần số góc $\omega' = \sqrt{\dfrac{k}{m+\Delta m}}$. Vị trí cân bằng mới thấp hơn vị trí cân bằng cũ một đoạn: $x_0 = \dfrac{\Delta mg}{k}$. Ta xét các trường hợp có thể xảy ra:



Nếu ngay trước khi đặt vật Δm hệ ở dưới vị trí cân bằng cũ một đoạn x_1 (tức là cách vị trí cân bằng mới một đoạn $|x_1 - x_0|$ thì

$$\begin{cases} A^2 = x_1^2 + \dfrac{v_1^2}{\omega^2} = x_1^2 + \left(\dfrac{m}{k}\right) v_1^2 \Rightarrow v_1^2 = \left(A^2 - x_1^2\right) \dfrac{k}{m} \\ A'^2 = \left(x_1 - x_0\right)^2 + \dfrac{v_1^2}{\omega'^2} = \left(x_1 - x_0\right)^2 + \left(\dfrac{m+\Delta m}{k}\right) v_1^2 \end{cases}$$
$$\Rightarrow A' = \sqrt{\left(x_1 - x_0\right)^2 + \left(A^2 - x_1^2\right) \dfrac{m+\Delta m}{m}}$$

Đặc biệt, nếu $x_1 = A$ thì $A_0 = |A - x_0|$

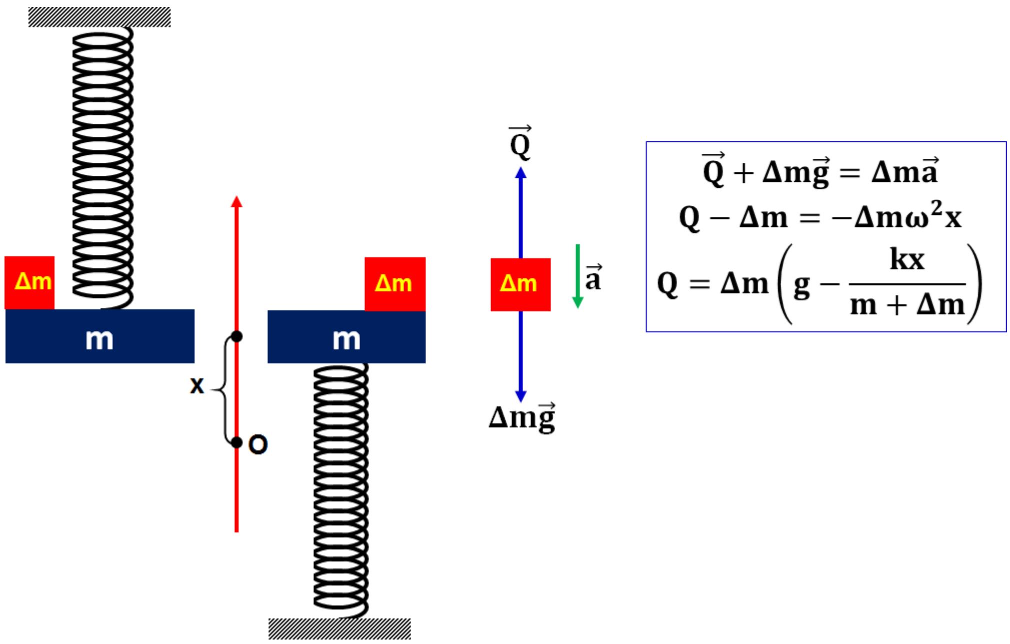
Nếu ngay trước khi đặt vật Δm hệ ở trên vị trí cân bằng cũ một đoạn x_1 (tức là cách vị trí cân bằng mới một đoạn $(x_1 + x_0)$ thì

$$\begin{cases} A^2 = x_1^2 + \dfrac{v_1^2}{\omega^2} = x_1^2 + \left(\dfrac{m}{k}\right) v_1^2 \Rightarrow v_1^2 = \left(A^2 - x_1^2\right) \dfrac{k}{m} \\ A'^2 = \left(x_1 + x_0\right)^2 + \dfrac{v_1^2}{\omega'^2} = \left(x_1 + x_0\right)^2 + \left(\dfrac{m + \Delta m}{k}\right) v_1^2 \end{cases}$$
$$\Rightarrow A' = \sqrt{\left(x_1 + x_0\right)^2 + \left(A^2 - x_1^2\right) \dfrac{m + \Delta m}{m}}$$

Đặc biệt, nếu $x_1 = A$ thì $A_0 = A + x_0$.

Chú ý

1. Để Δm luôn nằm trên m thì khi ở vị trí cao nhất độ lớn gia tốc của hệ không vượt quá g: $g \geq \omega^2 A = \dfrac{k}{m + \Delta m} A$
2. Khi điều kiện trên được thỏa mãn và khi vật có li độ x thì Δm tác dụng lên m một áp $\vec{N}$ đồng thời m tác dụng Δm một phản lực $\vec{Q}$ sao cho $N = Q$. Viết phương trình định luật II Newton cho vật Δm, ta tìm được: $Q = \Delta m \left(g - \dfrac{kx}{m + \Delta m}\right)$

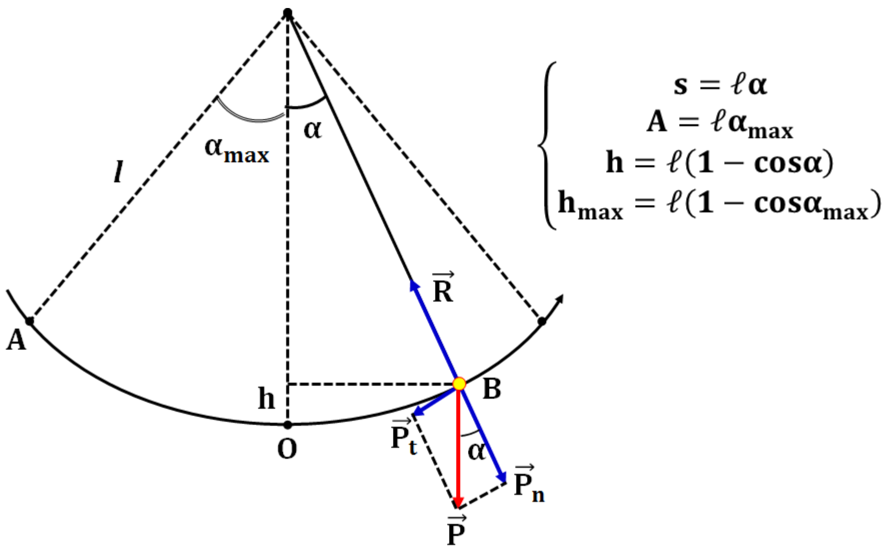


1.3 Con lắc đơn

- Con lắc đơn gồm một vật nặng treo vào sợi dây không dãn, vật nặng kích thước không đáng kể so với chiều dài sợi dây, sợi dây khối lượng không đáng kể so với khối lượng của vật nặng.

- Khi dao động nhỏ ($\sin\alpha \approx \alpha(\text{rad})$), con lắc đơn dao động điều hòa với phương trình: $s = A\ cos(\omega t + \varphi)$ hoặc $\alpha = \alpha_{\max}\cos(\omega t + \varphi)$ với $\alpha = \dfrac{s}{l}$; $\alpha_{\max} = \dfrac{A}{l}$
- Chu kỳ, tần số, tần số góc: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$; $f = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{g}{l}}$; $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{l}}$
- Lực kéo về khi biên độ góc nhỏ: $F = -\dfrac{mg}{l}s$
- Xác định gia tốc rơi tự do nhờ con lắc đơn: $g = \dfrac{4\pi^2 l}{T^2}$
- Chu kì dao động của con lắc đơn phụ thuộc độ cao, vĩ độ địa lí và nhiệt độ môi trường.
- Động năng: $W_d = \dfrac{mv^2}{2}$
- Thế năng: $W_t = mgl(1-\cos\alpha) \approx \dfrac{mgl\alpha^2}{2}$ ($\alpha \le 10^\circ \approx 0,17$ rad)
- Cơ năng: $W = W_d + W_t = mgl(1-\cos\alpha_{\max}) \approx \dfrac{mgl\alpha_{\max}^2}{2}$.

  Cơ năng của con lắc đơn được bảo toàn nếu bỏ qua ma sát.



1.3.1 Bài toán liên quan đến công thức tính ω, f, T

Phương pháp

$$\begin{cases} T_1 = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}} = \dfrac{\Delta t_1}{n} \\ T_1 = 2\pi\sqrt{\dfrac{l+\Delta l}{g}} = \dfrac{\Delta t_2}{n} \end{cases} ; \begin{cases} T_1 = 2\pi\sqrt{\dfrac{l_1}{g}};\ T_2 = 2\pi\sqrt{\dfrac{l_2}{g}} \\ T_+ = 2\pi\sqrt{\dfrac{l_1+l_2}{g}};\ T_- = 2\pi\sqrt{\dfrac{l_1-l_2}{g}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_+^2 = T_1^2 + T_2^2 \\ T_-^2 = T_1^2 - T_2^2 \end{cases}$$

Chú ý

1. Công thức độc lập với thời gian của con lắc đơn có thể suy ra từ công thức đối với con lắc đơn:
$$A^2 = x^2 + \frac{v^2}{\omega^2}$$
với $A = l\alpha_{\max}$; $x = s = l\alpha$; $\omega^2 = \frac{g}{l}$
2. Công thức độc lập với thời gian:
$$\begin{cases} A^2 = x^2 + \dfrac{v^2}{\omega^2} \Rightarrow \left(\dfrac{x}{A}\right)^2 + \left(\dfrac{v}{\omega A}\right)^2 = 1 \\ \left|\dfrac{x}{A}\right| = \left|\dfrac{s}{A}\right| = \left|\dfrac{a}{a_{\max}}\right| = q \end{cases} \Rightarrow |v| = \omega A\sqrt{1-q^2}$$
3. Với con lắc đơn lực kéo về cũng được tính
$$F_{kv} = -m\omega^2 x$$
với $x = s = l\alpha$; $\omega^2 = \frac{g}{l}$.
4. Nếu con lắc đơn gồm một dây kim loại nhẹ, dao động điều hoà trong một từ trường đều mà cảm ứng từ có hướng vuông góc với mặt phẳng dao động của con lắc thì trong dây dẫn xuất hiện một suất điện động cảm ứng:
$$\begin{cases} e = -\dfrac{d\Phi}{dt} = -\dfrac{BdS}{dt} = -\dfrac{B\dfrac{d\alpha}{2\pi}\pi l^2}{dt} = -\dfrac{Bl^2}{2}\dfrac{d\alpha}{dt} \\ \alpha = \alpha_{\max}\cos(\omega t + \varphi) \end{cases} \Rightarrow e = \frac{Bl^2\omega\alpha_{\max}}{2}\sin(\omega t + \varphi)$$

1.3.2 Bài toán liên quan đến năng lượng dao động của con lắc đơn

Phương pháp

- Khi không có ma sát cơ năng bảo toàn, bằng tổng thế năng và động năng, bằng thế năng cực đại, bằng động năng cực đại:
$$W = mgl(1-\cos\alpha) + \frac{mv^2}{2} = mgl(1-\cos\alpha_{\max}) = \frac{mv_{\max}^2}{2}\begin{cases} W_t = mgl(1-\cos\alpha) \\ W_d = \dfrac{mv^2}{2} \end{cases}$$

- Khi con lắc đơn dao động bé thì $(1-\cos\alpha) \approx \dfrac{\alpha}{2}$ nên cơ năng dao động:

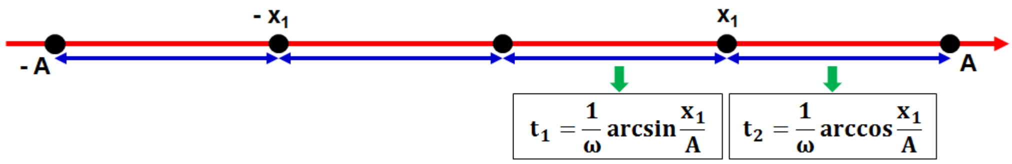
$$W = \frac{mgl}{2}\alpha^2 + \frac{mv^2}{2} = \frac{mgl}{2}\alpha_{\max}^2 = \frac{mv_{\max}^2}{2} = \frac{m\omega^2A^2}{2} = \frac{mgA^2}{2l}\begin{cases} W_t = \dfrac{mgl}{2}\alpha^2 \\ W_d = \dfrac{mv^2}{2} \\ \alpha_{\max} = \dfrac{A}{l} \end{cases}$$

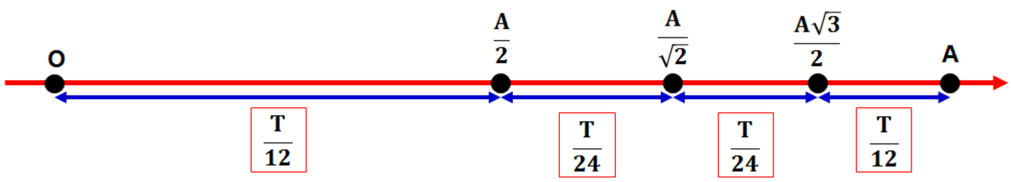
Chú ý

1. $$\begin{cases} W_d = \dfrac{mv^2}{2} \\ W_t = \dfrac{mgl}{2}\alpha^2 \\ W = W_t + W_d = \dfrac{m\omega^2A^2}{2} = \dfrac{mgl}{2}\alpha_{\max}^2 \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} \text{Cho } v \Rightarrow \begin{cases} W_d = \dfrac{mv^2}{2} \\ W_t = W - W_t \end{cases} \\ \text{Cho } \alpha \Rightarrow \begin{cases} W_t = \dfrac{mgl}{2}\alpha^2 \\ W_d = W - W_t \end{cases} \end{array}\right.$$

$$W_t = nW_d \Rightarrow \begin{cases} W_t = \dfrac{n}{n+1}W \Rightarrow \alpha = \pm\sqrt{\dfrac{n}{n+1}}\alpha_{\max} \\ W_d = \dfrac{1}{n+1}W \Rightarrow v = \pm\sqrt{\dfrac{1}{n+1}}v_{\max} \end{cases}$$

2. Nhớ lại khoảng thời gian trong dao động điều hòa





3. Chuyển động đi từ hai biên ra VTCB là chuyển động nhanh dần. Chuyển động đi từ VTCB ra 2 biên là chuyển động chậm dần.

4. Nếu con lắc đơn đang dao động điều hòa đúng lúc đi qua vị trí cân bằng nếu làm thay đổi chiều dài sao cho cơ năng không đổi:

$$W' = W\begin{cases} W = \dfrac{m\omega^2A^2}{2} = \dfrac{mgA^2}{2l} = \dfrac{mgl}{2}\alpha_{\max}^2 \\ W' = \dfrac{m\omega'^2A'^2}{2}\dfrac{mgA'^2}{2l} = \dfrac{mgl}{2}\alpha'^2_{\max} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha'_{\max} = \alpha_{\max}\sqrt{\dfrac{l}{l'}} \\ A' = A\sqrt{\dfrac{l'}{l}} \end{cases}$$

1.3.3 Bài toán liên quan đến vận tốc của vật, lực căng sợi dây, gia tốc

Phương pháp

\+ Từ công thức tính cơ năng:

$$W = mgl\left(1-\cos\alpha\right) + \frac{mv^2}{2} = mgl\left(1-\cos\alpha_{\max}\right) = \frac{mv_{\max}^2}{2}$$

suy ra:

$$\begin{cases} v^2 = 2gl\left(\cos\alpha - \cos\alpha_{\max}\right) \Rightarrow v = \pm\sqrt{2gl\left(\cos\alpha - \cos\alpha_{\max}\right)} \\ v_{\max}^2 = 2gl\left(1-\cos\alpha_{\max}\right) \Rightarrow v_{\max} = \sqrt{2gl\left(1-\cos\alpha_{\max}\right)} \end{cases}$$

Nếu $\alpha_{\max}$ thì $\begin{cases} \cos\alpha - \cos\alpha_{\max} \approx \dfrac{1}{2}\left(\alpha_{\max}^2 - \alpha\right) \\ 1-\cos\alpha \approx \dfrac{1}{2}\alpha_{\max}^2 \end{cases}$ nên $\begin{cases} v^2 = gl\left(\alpha_{\max}^2 - \alpha\right) \\ v_{\max}^2 = gl\alpha_{\max}^2 = \omega A \end{cases}$

\+ Lực đóng vai trò lực hướng tâm:

$$F - mg\cos\alpha = F_{ht} = \frac{mv^2}{l} = \frac{m}{l}2gl\left(\cos\alpha - \cos\alpha_{\max}\right) \Rightarrow R = mg\left(3\cos\alpha - 2\cos\alpha_{\max}\right)$$

Chú ý

1. Tại vị trí biên ($\alpha = \pm\alpha_{\max}$)lực căng sợi dây có độ lớn cực tiểu ($R_{\min} = mg\cos\alpha_{max}$). Tại vị trí cân bằng ($\alpha = 0$) lực căng sợi dây có độ lớn cực đại ($R_{\max} = mg(3-2\cos\alpha_{\max})$).
2. Nếu sợi dây chỉ chịu được lực kéo tối đa F_0 thì điều kiện để sợi dây không đứt là $R_{\max} \leq F_0$.
3. Nếu con lắc đơn đứng yên ở vị trí cân bằng thì lực căng sợi dây cùng độ lớn và ngược hướng với trọng lực. Nghĩa là chúng cân bằng nhau.
4. Nếu con lắc dao động đi qua vị trí cân bằng thì tại thời điểm này lực căng ngược hướng với trọng lực nhưng có độ lớn lớn hơn trọng lực:

$$R_{\max} = mg(3-2\cos\alpha_{\max}) > mg$$

Hai lực này không cân bằng nhau và hợp lực của chúng hướng theo $\vec{R}_{max}$

$$\vec{F}_{hl} = \vec{R}_{\max} + m\vec{g}\begin{cases} \text{hướng theo } \vec{R}_{\max} \\ F_{hl} = R_{\max} - mg = 2mg\left(1-\cos\alpha_{\max}\right) \end{cases}$$

5. Ở các vị trí không phải là vị trí cân bằng thì trọng lực và lực căng sợi dây không ngược hướng nhau nên không cân bằng nhau. Tức là nếu con lắc đơn đang dao động thì không có vị trí nào lực căng sợi dây cân bằng với trọng lực: $\vec{F}_{hl} = \vec{R}_{\max} + m\vec{g} \neq 0$. Tuy nhiên, sẽ tồn tại hai vị trí để $R = mg$ hay

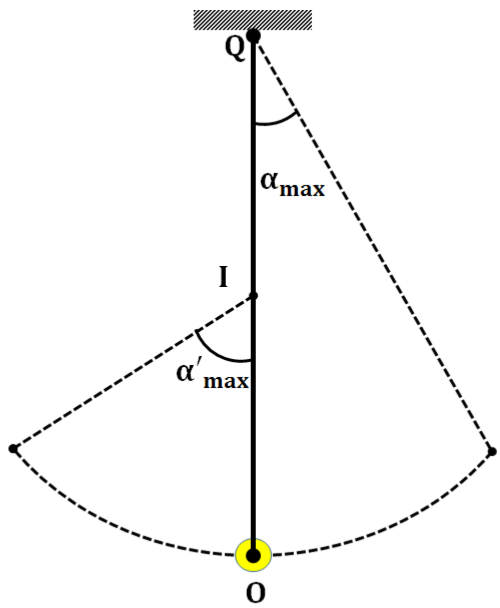
$$mg(3\cos\alpha - 2\cos\alpha_{\max}) = mg \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{1 + 2\cos\alpha_{\max}}{3}$$

6. Nếu khi qua VTCB sơi dây vướng đinh thì độ lớn lực căng dây trước và sao khi vướng lần lượt là

$$\begin{cases} R = mg\left(3 - 2\cos\alpha_{\max}\right) \\ R' = mg\left(3 - 2\cos\alpha'_{\max}\right) \end{cases}$$

Để tìm biên độ góc sau khi vướng đinh ta áp dụng định luật bảo toàn cơ năng:

$$\begin{aligned} &W = mgl\left(1 - \cos\alpha_{\max}\right) = mgl'\left(1 - \cos\alpha'_{\max}\right) \\ &\Rightarrow \cos\alpha'_{\max} = 1 - \frac{l}{l'}\left(1 - \cos\alpha_{\max}\right) \end{aligned}$$



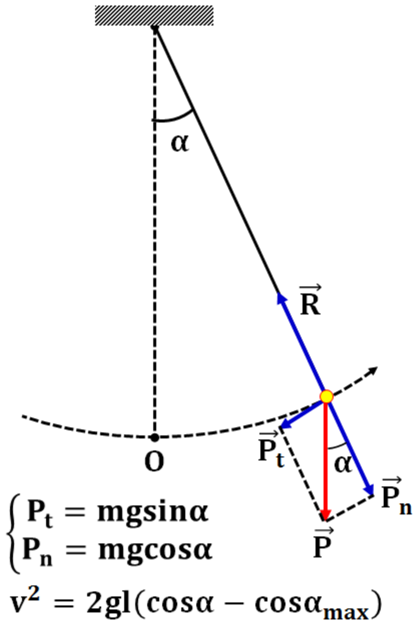
1.3.4 Bài toán liên quan đến gia tốc của con lắc đơn

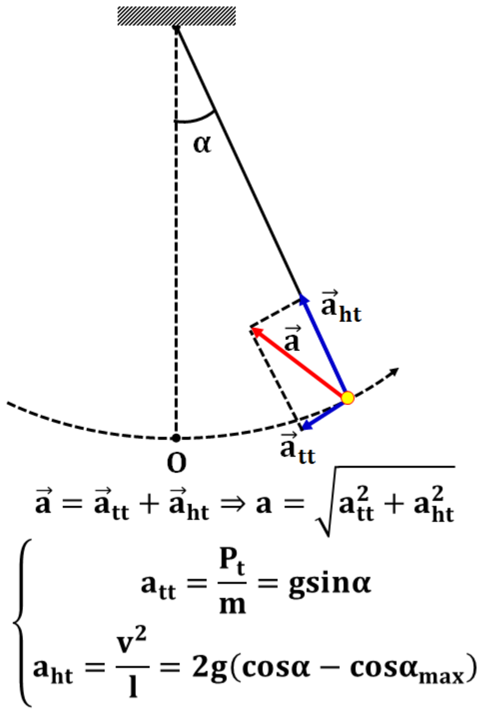
Phương pháp

Dao động của con lắc lò xo là chuyển động tịnh tiến nên nó chỉ có gia tốc tiếp tuyến. Dao động của con lắc đơn vừa có gia tốc tiếp tuyến vừa có gia tốc pháp tuyến (gia tốc hướng tâm) nên gia tốc toàn phần là tổng hợp của hai gia tốc nói trên:

$$\vec{a} = \vec{a}_{tt} + \vec{a}_{ht} \Rightarrow a = \sqrt{a_{tt}^2 + a_{ht}^2} \begin{cases} a_{tt} = \dfrac{P_t}{m} = g\sin\alpha \\ a_{ht} = \dfrac{v^2}{l} = 2g\left(\cos\alpha - \cos\alpha_{\max}\right) \end{cases}$$

Nếu α và $\alpha_{\max}$ nhỏ thì $\begin{cases} \cos\alpha - \cos\alpha_{\max} \approx \dfrac{1}{2}\left(\alpha_{\max} - \alpha\right) \\ \sin\alpha \approx \alpha \end{cases}$ nên $\begin{cases} a_{tt} = g\alpha \\ a_{ht} = g\left(\alpha_{\max}^2 - \alpha^2\right) \end{cases}$





1.3.5 Bài toán liên quan đến va chạm con lắc đơn

Phương pháp

Vật m chuyển động vận tốc $\vec{v}_0$ đến va chạm với vật M. Gọi $\vec{v}$, $\vec{V}$ là vận tốc của m và M ngay sau va chạm.

- Nếu va chạm mềm: $v = V$ nên:

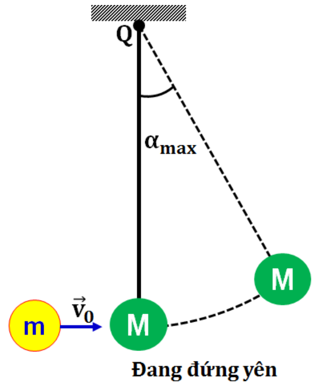
$$mv_0 = (m + M)\,V \Rightarrow V = \frac{mv_0}{m + M}$$

- Nếu va chạm đàn hồi:

$$\begin{cases} mv_0 = mv + MV \\ \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V = \dfrac{2mv_0}{m+M} \\ v = \dfrac{(m-M)\,v_0}{m+M} \end{cases}$$

1.3.5.1 Vật va chạm với con lắc tại vị trí cân bằng

Nếu con lắc đơn đang đứng yên tại vị trí cân bằng thì vật m chuyển động với vận tốc $\vec{v}_0$ đến va chạm vào nó.



Nếu Nếu va chạm mềm thì tốc độ của con lắc ngay sau va chạm (tại VTCB) là: $V = \dfrac{mv_0}{m+M}$.

Nếu va chạm đàn hồi thì tốc độ của con lắc ngay sau va chạm (tại VTCB) là: $V = \dfrac{2mv_0}{m+M}$

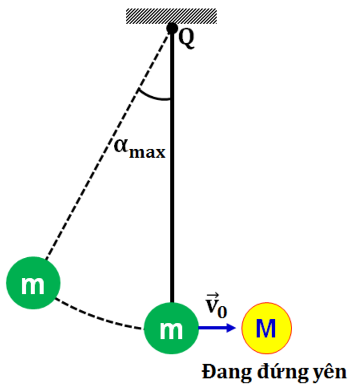
V cũng chính là tốc độ cực đại của con lắc sau va chạm nên $V = v_{\max}$ với $v_{\max}$ tính bằng

$$\left[\begin{array}{l} v_{\max} = \sqrt{2gh_{\max}} = \sqrt{2gl\,(1-\cos\alpha_{\max})} \\ v_{\max} = \omega A \ \ (\text{Dao động bé}) \end{array} \right. \quad \text{với} \quad \begin{cases} A = l\alpha_{\max} \\ \omega = \sqrt{\dfrac{g}{l}} = 2\pi f = \dfrac{2\pi}{T} \end{cases}$$

Cơ năng con lắc sau va chạm: $\begin{cases} \text{Va chạm mềm: } W' = W_{d\max} = \dfrac{(m+M)\,V^2}{2} \\ \text{Va chạm đàn hồi: } W' = W_{d\max} = \dfrac{MV^2}{2} \end{cases}$

1.3.5.2 Con lắc va chạm với vật tại vị trí cân bằng

Con lắc đơn đang dao động đúng lúc nó đi qua VTCB (có tốc độ cực đại $v_0 = v_{\max}$) thì nó va chạm với vật M đang đứng yên. Trong đó:



$$\left[\begin{array}{l} v_{\max} = \sqrt{2gh_{\max}} = \sqrt{2gl\,(1-\cos\alpha_{\max})} \\ v_{\max} = \omega A \ \ (\text{Dao động bé}) \end{array} \right.$$

Nếu va chạm mềm thì $V = \dfrac{mv_{\max}}{m+M}$ chính là tốc độ cực đại của con lắc sau va chạm:

$$V = \frac{mv_{\max}}{m+M} = v'_{\max} \left[\begin{array}{l} v'_{\max} = \sqrt{2gh'_{\max}} = \sqrt{2gl\left(1-\cos\alpha'_{\max}\right)} \\ v'_{\max} = \omega A' \left(\text{Dao động bé}\right) \end{array} \right.$$

Nếu va chạm đàn hồi thì $|v| = \left|\frac{(m-M)\,v_{\max}}{m+M}\right| = v'_{\max}$ chính là tốc độ cực đại của con lắc sau va chạm:

$$|v| = \left|\frac{(m-M)\,v_{\max}}{m+M}\right| = v'_{\max} \left[\begin{array}{l} v'_{\max} = \sqrt{2gh'_{\max}} = \sqrt{2gl\left(1-\cos\alpha'_{\max}\right)} \\ v'_{\max} = \omega A' \left(\text{Dao động bé}\right) \end{array} \right.$$

Cơ năng con lắc sau va chạm: $\left\{ \begin{array}{l} \text{Va chạm mềm: } W' = W_{d\max} = \dfrac{(m+M)\,V^2}{2} \\ \text{Va chạm đàn hồi: } W' = W_{d\max} = \dfrac{MV^2}{2} \end{array} \right.$

Quy trình giải nhanh

1. Con lắc đơn m dao động với biên độ góc $\alpha_{\max}$ đúng lúc qua vị trí cân bằng, nó va chạm vật M và biên độ góc sau đó là $\alpha'_{\max}$ thì:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{|m-M|}{m+M} = \sqrt{\dfrac{\left(1-\cos\alpha'_{\max}\right)}{\left(1-\cos\alpha_{\max}\right)}} \left(\text{Nếu va chạm đàn hồi}\right) \\ \dfrac{m}{m+M} = \sqrt{\dfrac{\left(1-\cos\alpha'_{\max}\right)}{\left(1-\cos\alpha_{\max}\right)}} \left(\text{Nếu va chạm mềm}\right) \end{array} \right.$$

2. Con lắc M đang đứng yên ở vị trí cân bằng thì vật m chuyển động theo phương ngang với tốc độ v_0 đến va chạm vào vật m và biên độ góc sau đó là $\alpha'_{\max}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{mv_0}{m+M} = \sqrt{2gl\left(1-\cos\alpha'_{\max}\right)} \left(\text{Nếu va chạm mềm}\right) \\ \dfrac{2mv_0}{m+M} = \sqrt{2gl\left(1-\cos\alpha'_{\max}\right)} \left(\text{Nếu va chạm đàn hồi}\right) \end{array} \right.$$

Nếu $\alpha'_{\max}$ nhỏ thì $\left(1-\cos\alpha_{\max}\right) \approx \dfrac{\alpha^2_{\max}}{2}$; $\left(1-\cos\alpha'_{\max}\right) \approx \dfrac{\alpha'^2_{\max}}{2}$

1.3.6 Bài toán liên quan đến thay đổi chu kì

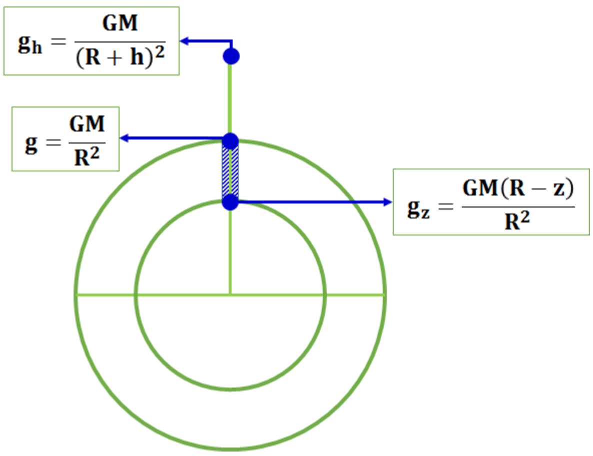
1.3.6.1 Chu kì thay đổi lớn

- Con lắc đưa lên cao:

$$\frac{T'}{T}=\frac{2\pi\sqrt{\dfrac{l'}{g_h}}}{2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}}=\sqrt{\frac{l'}{l}}\sqrt{\frac{g}{g_h}}=\sqrt{\frac{l'}{l}}\sqrt{\frac{\dfrac{GM}{R^2}}{\dfrac{GM}{(R+h)^2}}}=\sqrt{\frac{l'}{l}}\left(1+\frac{h}{R}\right)$$

- Con lắc đưa xuống sâu:

$$\frac{T'}{T}=\frac{2\pi\sqrt{\dfrac{l'}{g_z}}}{2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}}=\sqrt{\frac{l'}{l}}\sqrt{\frac{g}{g_z}}=\sqrt{\frac{l'}{l}}\sqrt{\frac{\dfrac{GM}{R^2}}{\dfrac{GM\left(R-z\right)}{R^3}}}=\sqrt{\frac{l'}{l}}\sqrt{\frac{R}{R-z}}$$



- Con lắc đưa lên thiên thể:

$$\frac{T'}{T}=\frac{2\pi\sqrt{\dfrac{l'}{g'}}}{2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}}=\sqrt{\frac{l'}{l}}\sqrt{\frac{g}{g'}}=\sqrt{\frac{l'}{l}}\sqrt{\frac{\dfrac{GM}{R^2}}{\dfrac{GM'}{R'^2}}}=\sqrt{\frac{l'}{l}}\sqrt{\frac{M}{M'}}\frac{R'}{R}$$

- Con lắc đơn di chuyển trên Trái đất:

$$\frac{T'}{T} = \frac{2\pi\sqrt{\dfrac{l'}{g'}}}{2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}} = \sqrt{\frac{l'}{l}}\sqrt{\frac{g}{g'}}$$

1.3.6.2 Chu kì thay đổi nhỏ

Công thức gần đúng $(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$ với $x \ll 1$

- $\sqrt{\dfrac{l+\Delta l}{l}} \approx \left(1 + \dfrac{\Delta l}{l}\right)^{1/2} \approx 1 + \dfrac{1}{2}\dfrac{\Delta l}{l}$
- $\sqrt{\dfrac{g}{g+\Delta g}} \approx \left(1 + \dfrac{\Delta g}{g}\right)^{-1/2} \approx 1 - \dfrac{1}{2}\dfrac{\Delta g}{g}$
- $\sqrt{\dfrac{1+\alpha t'}{1+\alpha t}} \approx (1+\alpha t')^{1/2}(1+\alpha t)^{-1/2} \approx \left(1 + \dfrac{1}{2}\alpha t'\right)\left(1 - \dfrac{1}{2}\alpha t\right) = 1 + \dfrac{1}{2}\alpha\,(t'-t)$
- $\sqrt{\dfrac{R}{R-z}} \approx \left(1 - \dfrac{z}{R}\right)^{-1/2} \approx 1 + \dfrac{1}{2}\dfrac{z}{R}$

♣ Chu kì thay đổi do thay đổi l và g:

$$\frac{T'}{T} = \frac{2\pi\sqrt{\dfrac{l'}{g'}}}{2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}} = \sqrt{\frac{l'}{l}}\sqrt{\frac{g}{g'}} = \sqrt{\frac{l+\Delta l}{l}}\sqrt{\frac{g}{g+\Delta}} \approx 1 + \frac{1}{2}\frac{\Delta l}{l} - \frac{1}{2}\frac{\Delta g}{g}$$

♣ Chu kì thay đổi do chỉ nhiệt độ thay đổi:

$$\frac{T'}{T} = \sqrt{\frac{l'}{l}}\sqrt{\frac{g}{g'}} = \sqrt{\frac{l+\alpha t'}{1+\alpha t}} \approx 1 + \frac{1}{2}\alpha\,(t'-t)$$

♣ Chu kì thay đổi do cả nhiệt độ và vị trí địa lí thay đổi:

$$\frac{T'}{T} = \sqrt{\frac{l'}{l}}\sqrt{\frac{g}{g'}} = \sqrt{\frac{l+\alpha t'}{1+\alpha t}}\sqrt{\frac{g}{g+\Delta g}} \approx 1 + \frac{1}{2}\alpha\,(t'-t) - \frac{1}{2}\frac{\Delta g}{g}$$

♣ Chu kì thay đổi do đưa lên độ cao h và nhiệt độ cũng thay đổi:

$$\frac{T'}{T} = \sqrt{\frac{l'}{l}}\sqrt{\frac{g}{g'}} = \sqrt{\frac{l+\alpha t'}{1+\alpha t}}\sqrt{\frac{\frac{GM}{R^2}}{\frac{GM}{(R+h)^2}}} \approx 1 + \frac{1}{2}\alpha\left(t'-t\right) + \frac{h}{R}$$

♣ Chu kì thay đổi do lực Acsimet.

Quả nặng có thể tích V khi đặt chìm trong chất lỏng hoặc chất khí có khối lượng riêng d luôn luôn chịu tác dụng của lực đẩy Acsimet $F_A = dVg$ (giá trị nhỏ). Lực đó gây ra cho vật gia tốc $\vec{a}$, có hướng ngược với hướng của $\vec{g}$ và có độ lớn

$$a = \frac{dVg}{m} = \frac{dVg}{DV} = \frac{dg}{D}$$

với D là khối lượng riêng của chất làm quả nặng

Lúc này vai trò của gia tốc trọng trường tác dụng lên vật được thay bằng gia tốc trọng trường hiệu dụng $\vec{g}'$ có hướng cùng hướng với $\vec{g}$ và có độ lớn

$$g' = g - a = g - \frac{dg}{D}$$

Do đó:

$$\frac{T'}{T} = \sqrt{\frac{l'}{l}}\sqrt{\frac{g}{g'}} = \left(1 - \frac{d}{D}\right)^{-1/2} \approx 1 + \frac{1}{2}\frac{d}{D}$$

♣ Nếu ngoại lực F gây ra một gia tốc nhỏ $a = \dfrac{F}{m}$ thì cũng được coi là một nguyên nhân dẫn đến sự thay đổi nhỏ của chu kì, và gọi chung là sự thay đổi chu kì nhỏ theo gia tốc và có:

$$\left(\frac{\Delta T}{T}\right) = \frac{1}{2}\frac{\pm a}{g}$$

lấy dấu $-$ khi ngoại lực cùng hướng với trọng lực và ngược lại thì dấu $+$.

Tổng hợp tất cả các nguyên nhân

$$\frac{T'}{T} \approx 1 + \frac{1}{2}\frac{\Delta l}{l} - \frac{1}{2}\frac{\Delta g}{g} + \frac{1}{2}\alpha\left(t'-t\right) + \frac{h}{R} + \frac{1}{2}\frac{d}{D}\begin{cases}\Delta l = l' - l\\ \Delta g = g' - g\end{cases}$$

1.3.6.3 Đồng hồ quả lắc

Gọi T, T' lần lượt là chu kì của đồng hồ đúng và chu kì của đồng hồ sai. Giả sử hai đồng hồ bắt đầu hoạt động cùng một lúc và đến một thời điểm số chỉ của chúng lần lượt là t và t'. Theo nguyên tắc cấu tạo của đồng hồ quả lắc thì: $tT = t'T$

- Khi đồng hồ chạy sai chỉ t' (s) thì đồng hồ chạy đúng chỉ:

$$t = t'\frac{T'}{T} = t'\sqrt{\frac{l'}{l}}\sqrt{\frac{g}{g'}}$$

- Khi đồng hồ chạy đúng chỉ t (s) thì đồng hồ chạy sai chỉ:

$$t' = t\frac{T}{T'} = t\sqrt{\frac{l}{l'}}\sqrt{\frac{g'}{g}}$$

Chú ý

1. Khi đồng hồ chạy đúng chỉ $t_{\text{đồng hồ đúng}} = t$ thì đồng hồ chạy sai chỉ thời gian $t_{\text{đồng hồ sai}} = \dfrac{tT}{T'}$. Độ chênh lệch:

$$\Delta t = t_{\text{đồng hồ đúng}} - t_{\text{đồng hồ sai}} = t - \frac{tT}{T'} = t\left(1 - \frac{T}{T'}\right)\begin{cases} > 0 \text{ Đồng hồ sai chạy chậm} \\ < 0 \text{ Đồng hồ sai chạy nhanh} \end{cases}$$

2. Khi đồng hồ chạy sai chỉ $t_{\text{đồng hồ sai}} = t'$ thì đồng hồ chạy đúng chỉ thời gian $t_{\text{đồng hồ đúng}} = \dfrac{t'T'}{T}$. Độ chênh lệch:

$$\Delta t = t_{\text{đồng hồ đúng}} - t_{\text{đồng hồ sai}} = t' - \frac{t'T'}{T} = t'\left(1 - \frac{T'}{T}\right)\begin{cases} > 0 \text{ Đồng hồ sai chạy chậm} \\ < 0 \text{ Đồng hồ sai chạy nhanh} \end{cases}$$

3. Khi đồng đang chạy sai muốn cho nó chạy đúng thì phải thay đổi chiều dài sao cho:

$$\frac{T'}{T} = 1 + \frac{1}{2}\frac{\Delta l}{l} - \frac{1}{2}\frac{\Delta g}{g} + \frac{1}{2}\alpha\Delta t + \frac{h}{R} + \frac{1}{2}\frac{d}{D} = 1 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\Delta l}{l} > 0 \Rightarrow \text{tăng} \\ \dfrac{\Delta l}{l} < 0 \Rightarrow \text{giảm} \end{cases}$$

4. Nếu cứ sau mỗi ngày đêm đồng hồ chạy **nhanh** b giây thì cần phải tăng chiều dài sao cho:
$$\frac{1}{2}\frac{\Delta l}{l} + \left(-\frac{b}{24.3600}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\Delta l}{l} = ?$$

5. Nếu cứ sau mỗi ngày đêm đồng hồ chạy **chậm** b giây thì cần phải giảm chiều dài sao cho:
$$\frac{1}{2}\frac{\Delta l}{l} + \left(\frac{b}{24.3600}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\Delta l}{l} = ?$$

1.3.7 Bài toán liên quan đến dao động con lắc đơn có thêm trường lực

Phương pháp

⋆ Khi chưa có $\vec{F}$ dao động của con lắc đơn bị chi phối bởi trọng lực $\vec{P}$

- Tại VTCB, phương của dây treo song song với phương $\vec{P}$ (hay $\vec{g}$)
- Chu kì dao động: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$

⋆ Khi có thêm $\vec{F}$ dao động của con lắc đơn bị chi phối bởi trọng lực hiệu dụng (còn gọi là trọng lực biểu kiến): $\vec{P'} = \vec{P} + \vec{F}$ có vai trò như $\vec{P}$. Gia tốc trọng trường hiệu dụng (biểu kiến): $\vec{g'} = \dfrac{\vec{P'}}{m} = \vec{g} + \dfrac{\vec{F}}{m}$. Lúc này:

- Tại VTCB, phương của dây treo song song với phương $\vec{P'}$ (hay $\vec{g'}$)
- Chu kì dao động: $T' = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g'}}$

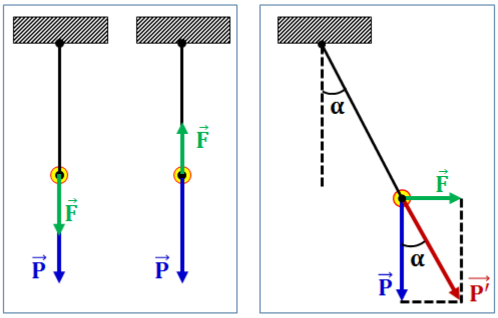
Vì $\vec{P}$ (hay $\vec{g}$) có hướng thẳng đứng từ trên xuống nên để thực hiện các phép cộng các véc tơ $\vec{P'} = \vec{P} + \vec{F}$ hay $\vec{g'} = \dfrac{\vec{P'}}{m} = \vec{g} + \dfrac{\vec{F}}{m}$ ta phân biệt các trường hợp: $\vec{F}$ hướng thẳng đứng, hướng ngang và hướng xiên. Cần lưu ý $\vec{P'}$ (hay $\vec{g'}$) có phương trùng với sợi dây và có chiều sao cho nó luôn có xu hướng kéo căng sợi dây!

*** Khi $\vec{F}$ hướng thẳng đứng** (hình a)

$$\vec{g'} = \vec{g} + \frac{\vec{F}}{m} \xrightarrow{\vec{F}\text{ hướng thẳng đứng}} \begin{cases} \xrightarrow{\text{xuống}} g' = g + \dfrac{F}{m} \\ \xrightarrow{\text{lên và } g > \frac{F}{m}} g' = g - \dfrac{F}{m} \end{cases}$$

*** Khi $\vec{F}$ hướng ngang** (hình b)

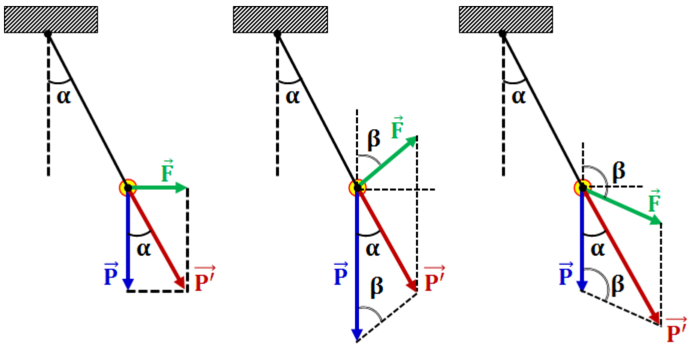
$$\vec{g'} = \vec{g} + \frac{\vec{F}}{m} \xrightarrow{\vec{F}\text{ hướng ngang}} \begin{cases} \tan\alpha = \dfrac{F}{P} \\ g' = \sqrt{g^2 + \left(\dfrac{F}{m}\right)^2} = \dfrac{g}{\cos\alpha} \end{cases}$$



Hình a Hình b

*** Khi $\vec{F}$ hướng xiên**

$$\vec{g'} = \vec{g} + \frac{\vec{F}}{m} \xrightarrow{\vec{F}\text{ hướng xiên}} \begin{cases} g' = \sqrt{g^2 + \left(\dfrac{F}{m}\right)^2 - 2g\dfrac{F}{m}\cos\beta} \\ \dfrac{P'}{\sin\beta} = \dfrac{F}{\sin\alpha} \Rightarrow \sin\alpha = \dfrac{F}{mg'}\sin\beta \end{cases}$$



Ta xét các loại lực $\vec{F}$ phổ biến

- Lực điện trường: $\vec{F} = q\vec{E}$, độ lớn $F = |q|E$
- Lực đẩy Acsimet: $\vec{F_A}$ luôn thẳng đứng hướng lên và có độ lớn $F_A = \rho g V$. Trong đó: ρ là khối lượng riêng của chất lỏng hay chất khí, g là gia tốc rơi tự do và V là thể tích của phần vật chìm trong chất lỏng hay chất khí đó.
- Lực quán tính: $\vec{F} = -m\vec{a}$, độ lớn $F = ma$

1.3.7.1 Khi $\vec{F}$ có phương thẳng đứng

Khi $\vec{F}$ hướng thẳng đứng xuống thì $\vec{P'}$ cũng có hướng thẳng đứng xuống và độ lớn $P' = P + F$ nên $g' = g + \frac{F}{m}$. Khi $\vec{F}$ hướng thẳng đứng lên mà $F < P$ thì $\vec{P'}$ có hướng thẳng đứng xuống và độ lớn $P' = P - F$ nên $g' = g - \frac{F}{m}$. Còn khi $\vec{F}$ hướng thẳng đứng lên mà $F > P$ thì $\vec{P'}$ có hướng thẳng đứng lên và độ lớn $P' = F - P$ nên $g' = \frac{F}{m} - g$.

Chú ý

1. Khi con lắc đơn đang dao động mà lực $\vec{F}$ có hướng thẳng đứng bắt đầu tác dụng thì cơ năng thay đổi hay không còn phụ thuộc vào li độ lúc tác dụng:

   - Nếu lúc tác động con lắc qua VTCB ($\alpha = 0$) thì không làm thay đổi tốc độ cực đại $v'_{\max} = v_{\max}$ nên không làm thay đổi động năng cực đại, tức là không làm thay đổi cơ năng dao động.

   - Nếu lúc tác động con lắc qua VT biên ($\alpha = \pm\alpha_{\max}$) thì không làm thay đổi biên độ góc ($\alpha'_{max} = \alpha_{\max}$) nên tỉ số cơ năng bằng tỉ số thế năng cực đại và bằng tỉ số gia tốc.

   - Nếu lúc tác động con lắc qua li độ góc $\alpha = \pm\frac{\alpha_{\max}}{n}$ thì độ biến thiên thế năng lúc này đúng bằng độ biến thiên cơ năng.

$$g' = g \pm \frac{F}{m} \left\{ \begin{array}{l} \alpha = 0 \Rightarrow \frac{W'}{W} = 1 \Rightarrow v'_{\max} = v_{\max} \\ \alpha = \pm\alpha_{\max} \Rightarrow \frac{W'}{W} = \frac{g'}{g} \Rightarrow \alpha'_{\max} = \alpha \\ \alpha = \pm\frac{\alpha_{\max}}{n} \Rightarrow \Delta W_t = \frac{m\left(g' - g\right)l}{2}\alpha^2 = \frac{m\left(g' - g\right)l}{2n^2}\alpha^2_{\max} = \frac{1}{n^2}\left(\frac{g'}{g} - 1\right)W \\ W' = W + \Delta W_t \Rightarrow \frac{mg'l}{2}\alpha'^2_{\max} = \frac{mgl}{2}\alpha^2_{\max} + \frac{m\left(g' - g\right)l}{2n^2}\alpha^2_{\max} \Rightarrow \alpha_{\max} = ? \end{array} \right.$$

2. Trong công thức tính vận tốc:

$$\left\{ \begin{array}{l} v^2 = 2gl\left(\cos\alpha - \cos\alpha_{\max}\right) \xrightarrow{\alpha_{\max} \ll 1} v^2 = gl\left(\alpha^2_{\max} - \alpha\right) \\ v_{\max} = \sqrt{2gl\left(1 - \cos\alpha_{\max}\right)} \xrightarrow{\alpha_{\max} \ll 1} v_{\max} = \sqrt{gl}\alpha_{\max} \end{array} \right.$$

lúc này ta thay g bằng g':

$$\left\{ \begin{array}{l} v'^2 = 2g'l\left(\cos\alpha - \cos\alpha_{\max}\right) \xrightarrow{\alpha_{\max} \ll 1} v^2 = g'l\left(\alpha^2_{\max} - \alpha\right) \\ v'_{\max} = \sqrt{2g'l\left(1 - \cos\alpha_{\max}\right)} \xrightarrow{\alpha_{\max} \ll 1} v_{\max} = \sqrt{g'l}\alpha_{\max} \end{array} \right.$$

3. Khi con lắc treo trên vật chuyển động biến đổi đều với gia tốc $\vec{a}$ (Chuyển động nhanh dần đều $\vec{a} \downarrow\downarrow \vec{v}$ và chuyển động chậm dần đều $\vec{a} \downarrow\uparrow \vec{v}$) theo phương thẳng đứng thì nó chịu thêm lực quán tính: $\vec{F} = -m\vec{a}$, độ lớn $F = ma$ ($\vec{F} \downarrow\uparrow \vec{a}$) nên gia tốc trọng trường hiệu dụng: $\vec{g'} = \vec{g} + \dfrac{\vec{F}}{m} = \vec{g} - \vec{a}$

$$\text{Xét } a < g \begin{cases} \vec{a} \text{ hướng xuống} \Rightarrow g' = g - a \Rightarrow T' = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g-a}} \\ \vec{a} \text{ hướng lên} \Rightarrow g' = g + a \Rightarrow T' = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g+a}} \end{cases}$$

4. Khi con lắc đơn đang dao động mà thang máy bắt đầu chuyển động biến đổi đều theo phương thẳng đứng ($g' = g \pm a$) thì cơ năng thay đổi hay không còn phụ thuộc vào li độ lúc tác dụng:

   - Nếu lúc tác động con lắc qua VTCB ($\alpha = 0$) thì không làm thay đổi tốc độ cực đại $v'_{\max} = v_{\max}$ nên không làm thay đổi động năng cực đại, tức là không làm thay đổi cơ năng dao động.
   - Nếu lúc tác động con lắc qua VT biên ($\alpha = \pm\alpha_{\max}$) thì không làm thay đổi biên độ góc (${\alpha'}_{max} = \alpha_{\max}$) nên tỉ số cơ năng bằng tỉ số thế năng cực đại và bằng tỉ số gia tốc.
   - Nếu lúc tác động con lắc qua li độ góc $\alpha = \pm\dfrac{\alpha_{\max}}{n}$ thì độ biến thiên thế năng lúc này đúng bằng độ biến thiên cơ năng.

$$g' = g \pm a \begin{cases} \alpha = 0 \Rightarrow \dfrac{W'}{W} = 1 \Rightarrow v'_{\max} = v_{\max} \\ \alpha = \pm\alpha_{\max} \Rightarrow \dfrac{W'}{W} = \dfrac{g'}{g} \Rightarrow \alpha'_{\max} = \alpha \\ \alpha = \pm\dfrac{\alpha_{\max}}{n} \Rightarrow \Delta W_t = \dfrac{m(g'-g)l}{2}\alpha^2 = \dfrac{m(g'-g)l}{2n^2}\alpha^2_{\max} = \dfrac{1}{n^2}\left(\dfrac{g'}{g} - 1\right)W \\ W' = W + \Delta W_t \Rightarrow \dfrac{mg'l}{2}{\alpha'}^2_{\max} = \dfrac{mgl}{2}\alpha^2_{\max} + \dfrac{m(g'-g)l}{2n^2}\alpha^2_{\max} \Rightarrow \alpha_{\max} = ? \end{cases}$$

1.3.7.2 Xét $\vec{F}$ có phương ngang

$$\vec{g'} = \vec{g} + \dfrac{\vec{F}}{m} \xrightarrow{\vec{F}\text{ hướng ngang}} \begin{cases} \tan\alpha = \dfrac{F}{P} \\ g' = \sqrt{g^2 + \left(\dfrac{F}{m}\right)^2} = \dfrac{g}{\cos\alpha} \end{cases}$$

Chú ý

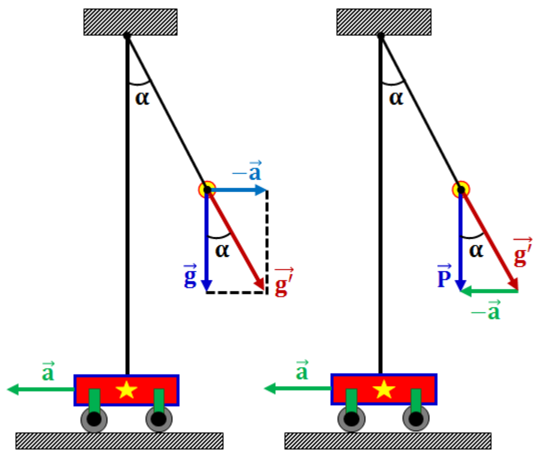
1. Đối với trường hợp tụ điện phẳng, cường độ điện trường hướng từ bản dương sang bản âm và có độ lớn: $E = \dfrac{U}{d}$, với U là hiệu điện thế giữa hai bản tụ và d là khoảng cách giữa hai bản tụ.

2. Để tính vận tốc của vật, trước tiên xác định g', xác định vị trí cân bằng, rồi từ đó xác định α, $\alpha_{\max}$ và áp dụng các công thức:

$$\begin{cases} v'^2 = 2g'l\left(\cos\alpha - \cos\alpha_{\max}\right) \xrightarrow{\alpha_{\max}\ll 1} v^2 = g'l\left(\alpha_{\max}^2 - \alpha\right) \\ v'_{\max} = \sqrt{2g'l\left(1-\cos\alpha_{\max}\right)} \xrightarrow{\alpha_{\max}\ll 1} v_{\max} = \sqrt{g'l}\alpha_{\max} \end{cases}$$

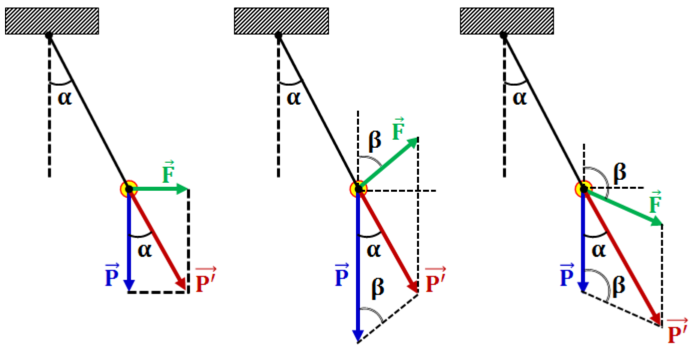
3. Khi con lắc treo trên vật chuyển động biến đổi đều với gia tốc $\vec{a}$ (Chuyển động nhanh dần đều $\vec{a}\downarrow\downarrow\vec{v}$ và chuyển động chậm dần đều $\vec{a}\downarrow\uparrow\vec{v}$) theo phương ngang thì nó chịu thêm lực quán tính: $\vec{F} = -m\vec{a}$, độ lớn $F = ma$ ($\vec{F}\downarrow\uparrow\vec{a}$) nên gia tốc trọng trường hiệu dụng: $\vec{g'} = \vec{g} + \dfrac{\vec{F}}{m} = \vec{g} - \vec{a}$. Khi ở VTCB, phương dây treo hợp với phương thẳng đứng một góc β và độ lớn gia tốc trọng trường hiệu dụng $g' > g$

$$\begin{cases} \tan\beta = \dfrac{a}{g} \\ g' = \sqrt{g^2 + a^2} = \dfrac{g}{\cos\beta} > g \end{cases}$$



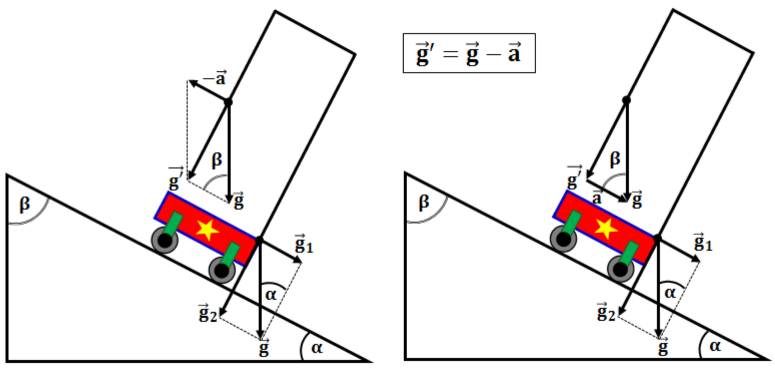
1.3.7.3 Khi $\vec{F}$ có phương xiên

$$\vec{g'} = \vec{g} + \frac{\vec{F}}{m} \xrightarrow{\vec{F}\text{ hướng xiên}} \begin{cases} g' = \sqrt{g^2 + \left(\dfrac{F}{m}\right)^2 - 2g\dfrac{F}{m}\cos\beta} \\ \dfrac{P'}{\sin\beta} = \dfrac{F}{\sin\alpha} \Rightarrow \sin\alpha = \dfrac{F}{mg'}\sin\beta \end{cases}$$

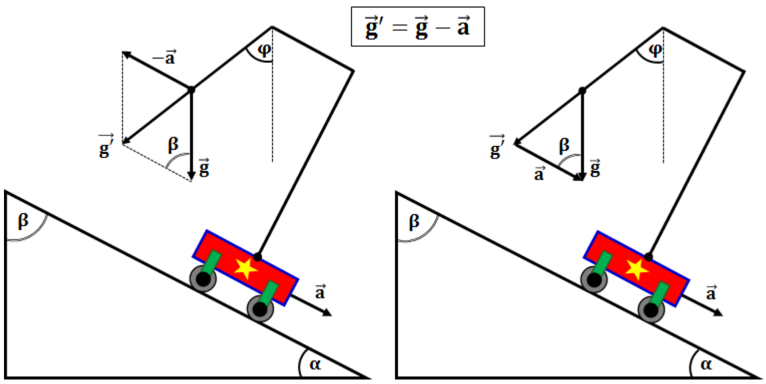


Chú ý

1. Nếu vật trượt không ma sát trên mặt phẳng nghiêng thì chuyển động của nó là chuyển động nhanh dần đều với gia tốc $a = g_1 = g\sin\alpha$. Khi con lắc đơn treo trên vật này thì tại vị trí cân bằng phương của sợi dây vuông góc với mặt phẳng nghiêng và có độ lớn $g' = g_2 = g\cos\alpha$



2. Khi con lắc đơn treo trên vật chuyển động nhanh dần đều xuống dốc thì gia tốc trọng trường hiệu dụng $g' = \sqrt{g^2 + a^2 - 2ga\cos\beta}$ và khi ở vị trí cân bằng sợi dây hợp với phương thẳng đứng một góc φ sao cho $\dfrac{a}{\sin\varphi} = \dfrac{g'}{\sin\beta}$

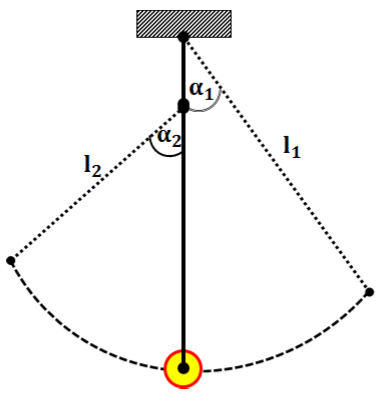


1.3.8 Bài toán hệ con lắc thay đổi

Phương pháp

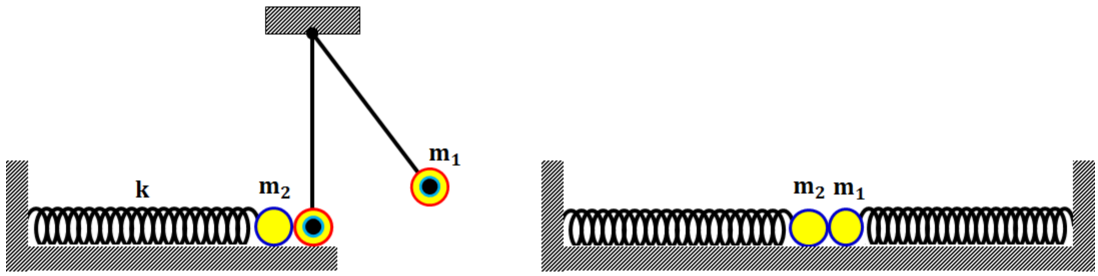
*** Con lắc vướng đinh**

$$\begin{cases} \begin{cases} T_1 = 2\pi\sqrt{\dfrac{l_1}{g}} \\ T_2 = 2\pi\sqrt{\dfrac{l_2}{g}} \end{cases} \Rightarrow T = \dfrac{T_1 + T_2}{2} \\ W_2 = W_1 \Rightarrow \dfrac{mgA_1^2}{2l_1} = \dfrac{mgA_2^2}{2l_2} \Rightarrow \dfrac{mgl_1}{2}\alpha_1^2 = \dfrac{mgl_2}{2}\alpha_2^2 \end{cases}$$



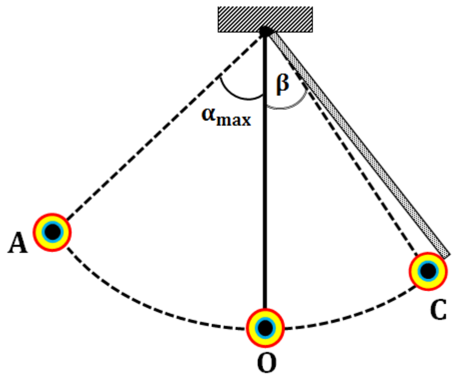
*** Con lắc đơn va chạm đàn hồi với con lắc lò xo** $(m_1 = m_2)$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \dfrac{mgl}{2}\alpha_{\max}^2 = \dfrac{kA^2}{2} \\ W_1 = W_2 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{kA_1^2}{2} = \dfrac{kA_2^2}{2} \\ \begin{cases} T_1 = 2\pi\sqrt{\dfrac{l_1}{g}} \\ T_2 = 2\pi\sqrt{\dfrac{l_2}{g}} \end{cases} \Rightarrow T = \dfrac{T_1 + T_2}{2} \end{array} \right. \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{kA_1^2}{2} = \dfrac{kA_2^2}{2} \\ T = \dfrac{T_1 + T_2}{2} \end{cases}$$



***Con lắc đơn va chạm với mặt phẳng**

$$\begin{cases} T_1 = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}} \\ t_{OC} = \dfrac{1}{\omega}\arcsin\dfrac{\beta}{\alpha_{\max}} \end{cases} \Rightarrow T = \frac{T_1}{2} + 2t_{OC}$$



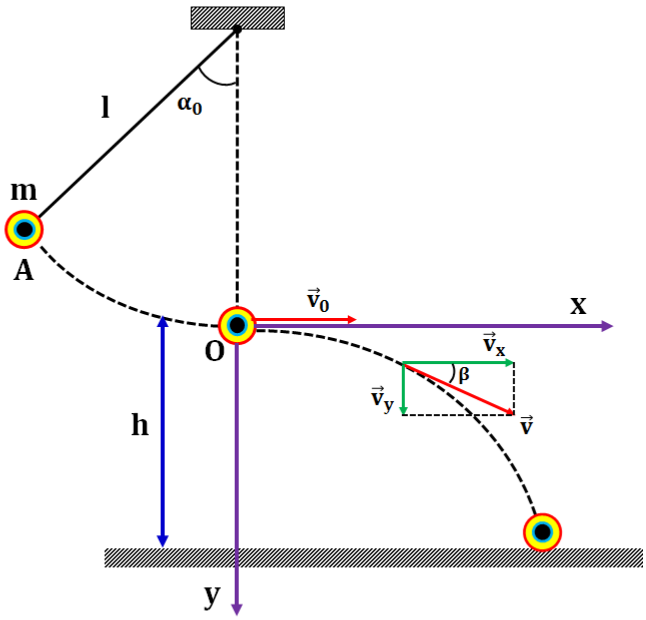
1.3.9 Bài toán liên quan đến chuyển động của vật sau khi dây đứt

Phương pháp

*** Đứt khi vật đi qua vị trí cân bằng**

- Tốc độ quả cầu khi dây đứt: $v_0 = \sqrt{2gl\left(1 - \cos\alpha_{\max}\right)}$
- Phương trình chuyển động: $\begin{cases} x = v_0 t \\ y = \dfrac{1}{2}gt^2 \end{cases}$

  Khi chạm đất: $\begin{cases} y_C = h \Rightarrow \dfrac{1}{2}gt^2 = h \Rightarrow t_C = \sqrt{\dfrac{2h}{g}} \\ x_C = v_0 t_C \end{cases}$
- Các thành phần vận tốc: $\begin{cases} v_x = v_0 \\ v_y = gt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tan\beta = \dfrac{v_y}{v_x} = \dfrac{gt}{v_0} \\ v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \end{cases}$

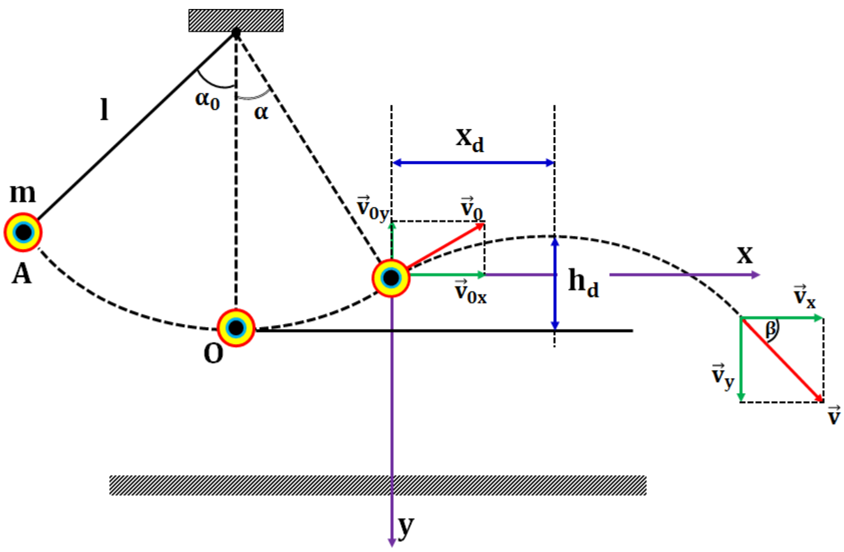


*** Đứt khi vật đi lên qua vị trí có li độ góc α**

- Tốc độ quả cầu khi dây đứt: $v_0 = \sqrt{2gl\left(\cos\alpha - \cos\alpha_{\max}\right)}$
- Sau khi dây đứt vật chuyển động giống như vật ném xiên, phân tích vector vận tốc ban đầu: $\vec{v}_0 = \vec{v}_{0x} + \vec{v}_{0y}\begin{cases} v_{0x} = v_0\cos\alpha \\ v_{0y} = v_0\sin\alpha \Rightarrow v_y = v_{0y} - gt \end{cases}$

  Thành phần v_{0x} được bảo toàn. Khi lên đến vị trí đỉnh thì $v_y = 0$
- Cơ năng tại vị trí bất kì bằng cơ năng tại vị trí cao nhất bằng cơ năng lúc đầu:

$$W = mgh + \frac{mv_{0x}^2}{2} + \frac{mv_{0y}^2}{2} = mgh_d + \frac{mv_{0x}^2}{2} = W_0 = mgl\left(1 - \cos\alpha_0\right)$$



1.4 Dao động tắt dần. Dao động duy trì. Dao động cưỡng bức. Cộng hưởng

★ **Dao động tắt dần**

Khi không có ma sát, con lắc dao động điều hòa với tần số riêng. Tần số riêng của con lắc chỉ phụ thuộc vào các đặc tính của con lắc.

Dao động có biên độ giảm dần theo thời gian gọi là dao động tắt dần. Nguyên nhân làm tắt dần dao động là do lực ma sát và lực cản của môi trường làm tiêu hao cơ năng của con lắc, chuyển hóa dần dần cơ năng thành nhiệt năng. Vì thế biên độ của con lắc giảm dần và cuối cùng con lắc dừng lại.

Ứng dụng: Các thiết bị đóng cửa tự động hay giảm xóc ô tô, xe máy, . . . là những ứng dụng của dao động tắt dần.

★ **Dao động duy trì**

Nếu ta cung cấp thêm năng lượng cho vật dao động có ma sát để bù lại sự tiêu hao vì ma sát mà không làm thay đổi chu kì riêng của nó thì dao động kéo dài mãi và gọi là dao động duy trì.

★ **Dao động cưỡng bức**

Dao động chịu tác dụng của một ngoại lực cưỡng bức tuần hoàn gọi là dao động cưỡng bức.

Dao động cưỡng bức có biên độ không đổi và có tần số bằng tần số lực cưỡng bức.

Biên độ của dao động cưỡng bức phụ thuộc vào biên độ của lực cưỡng bức, vào lực cản trong hệ và vào sự chênh lệch giữa tần số cưỡng bức f và tần số riêng f_0 của hệ. Biên độ của lực cưỡng bức càng lớn, lực cản càng nhỏ và sự chênh lệch giữa f và f_0 càng ít thì biên độ của dao động cưỡng bức càng lớn.

★ **Cộng hưởng**

Hiện tượng biên độ của dao động cưỡng bức tăng dần lên đến giá trị cực đại khi tần số f của lực cưỡng bức tiến đến bằng tần số riêng fo của hệ dao động gọi là hiện tượng cộng hưởng.

Điều kiện $f = f_0$ gọi là điều kiện cộng hưởng. Đường cong biểu diễn sự phụ thuộc của biên độ vào tần số cưỡng bức gọi là đồ thị cộng hưởng. Nó càng nhọn khi lực cản của môi trường càng nhỏ.

Tầm quan trọng của hiện tượng cộng hưởng:

Những hệ dao động như tòa nhà, cầu, bệ máy, khung xe,... đều có tần số riêng. Phải cẩn thận không để cho các hệ ấy chịu tác dụng của các lực cưỡng bức mạnh, có tần số bằng tần số riêng để tránh sự cộng hưởng, gây dao động mạnh làm gãy, đổ.

Hộp đàn của đàn ghi ta, violon,... là những hộp cộng hưởng với nhiều tần số khác nhau của dây đàn làm cho tiếng đàn nghe to, rõ.

1.4.1 Bài toán liên quan đến hiện tượng cộng hưởng

Phương pháp

Hiện tượng cộng hưởng xảy ra khi chu kì dao động cưỡng bức bằng chu kì dao động riêng

$$T_{cb} = T_0 \begin{cases} T_{cb} = \dfrac{\Delta S}{v} = \dfrac{2\pi}{\omega_{cb}} \\ T_0 = \dfrac{1}{f_0} = \dfrac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}} \end{cases}$$

Đổi đơn vị: $\begin{cases} 1 \text{ km/h} = \dfrac{1}{3,6} \text{ m/s} \\ 1 \text{ m/s} = 3,6 \text{ km/h} \end{cases}$

Chú ý

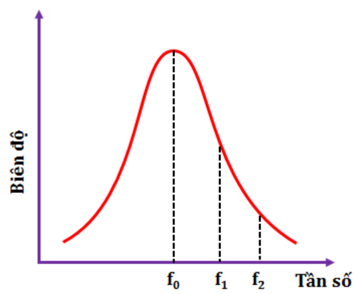
1. Để so sánh biên độ dao động cưỡng bức:

   - Xác định vị trí cộng hưởng:

     $$\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

   - Vẽ đường cong biểu diễn sự phụ thuộc biên độ dao động cưỡng bức vào tần số dao động cưỡng bức.

   - So sánh biên độ và lưu ý: càng gần vị trí cộng hưởng biên độ càng lớn, càng xa vị trí cộng hưởng biên độ càng bé.



2. Độ cứng tương đương của hệ lò xo ghép song song và ghép nối tiếp lần lượt là:

$$\begin{cases} k = k_1 + k_2 + \cdots \\ \dfrac{1}{k} = \dfrac{1}{k_1} + \dfrac{1}{k_2} + \cdots \end{cases}$$

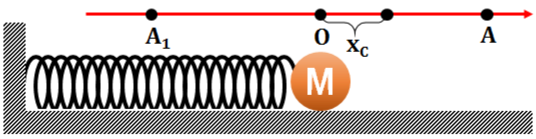
1.4.2 Bài toán liên quan đến tìm tổng quãng đường dao động được (gần đúng) trong dao động tắt dần

Phương pháp

Lúc đầu cơ năng dao động là W

$$W = \frac{kA^2}{2} = \frac{kx_0^2}{2} + \frac{mv^2}{3}$$

do ma sát nên cơ năng giảm dần và cuối cùng nó dừng lại ở li độ x_C rất gần vị trí cân bằng $\left(W_C = \dfrac{kx_C^2}{2} \approx 0\right)$



Gọi S là tổng quãng đường đi được kể từ lúc bắt đầu dao động cho đến khi dừng hẳn, theo định luật bảo toàn và chuyển hóa năng lượng thì độ giảm cơ năng $(W - W_C)$ đúng bằng công của lực ma sát $(A_{ms} = F_{ms}S)$.

$$W - \underbrace{W_C}_{\approx 0} = F_{\text{ms}}S \Rightarrow S = \frac{W}{F_{\text{ms}}}$$

$(F_{ms} = \mu mg$ (nếu dao động phương ngang), $F_{ms} = \mu mg\cos\alpha$ (nếu dao động phương xiên góc α) với μ là hệ số ma sát)

1.4.3 Bài toán liên quan đến phần trăm cơ năng bị mất và phần trăm biên độ bị giảm

Phương pháp

- Phần trăm cơ năng của con lắc bị mất đi trong một dao động toàn phần:

$$\frac{\Delta W}{W}=\frac{W-W'}{W}=\frac{\frac{kA^2}{2}-\frac{kA'^2}{2}}{\frac{kA^2}{2}}=\frac{\overbrace{(A+A')}^{\approx 2A}\overbrace{(A-A')}^{\approx \Delta A}}{A^2}\approx\frac{2A.\Delta A}{A^2}=2\frac{\Delta A}{A}$$

với $\frac{\Delta A}{A}$ là phần trăm biên độ bị giảm sau một dao động toàn phần

- Phần trăm biên độ bị giảm sau n chu kì: $h_{na}=\frac{A-A_n}{A}$
- Phần trăm biên độ còn lại sau n chu kì: $\frac{A_n}{A}=1-h_{na}$
- Phần trăm cơ năng còn lại sau n chu kì: $h_{nW}=\frac{W_n}{W}=\left(\frac{A_n}{A}\right)^2$
- Phần trăm cơ năng bị mất (chuyển thành nhiệt) sau n chu kì: $\frac{W-W_n}{W}=1-h_{nW}$
- Phần cơ năng còn lại sau n chu kì: $W_n=h_{nW}W$ và phần đã bị mất tương ứng:

  $\Delta W_n=(1-h_{nW})\,W$

1.4.4 Bài toán liên quan đến độ giảm biên độ sau một chu kì

Phương pháp

- Ta chỉ xét dao động tắt dần chậm nên độ giảm biên độ sau một chu kì rất nhỏ: $\Delta A=A-A'\Rightarrow A+A'$
- Độ giảm cơ năng sau một chu kì bằng công của lực ma sát thực hiện trong chu kì đó

$$\frac{kA^2}{2}-\frac{kA'^2}{2}=F_{ms}.4A\Leftrightarrow\frac{k}{2}(A+A')(A-A')=F_{ms}.4A\Rightarrow\Delta A\approx\frac{4F_{ms}}{k}$$

- Độ giảm biên độ sau mỗi chu kì: $\Delta A=\frac{4F_{ms}}{k}$
- Độ giảm biên độ sau nửa chu kì: $\frac{\Delta A}{2}=\frac{2F_{ms}}{k}$
- Biên độ dao động còn lại sau n chu kì: $A_n=A-n\Delta A$
- Tổng số dao động thực hiện được: $N=\frac{A}{\Delta A}$
- Thời gian dao động: $\Delta t=N.T$

1.4.5 Bài toán liên quan đến tốc độ trung bình trong quá trình dao động tắt dần

Phương pháp

Tổng quãng đường và tổng thời gian từ lúc bắt đầu dao động cho đến khi dừng hẳn lần lượt là

$$\begin{cases} S = \dfrac{W}{F_{ms}} = \dfrac{kA^2}{2.F_{ms}} \\ \Delta t = NT = \dfrac{A}{\Delta A}T = \dfrac{kA}{4F_{ms}}\dfrac{2\pi}{\omega} \end{cases}$$

Tốc độ trung bình trong cả quá trình dao động tắt dần là: $v_{td} = \dfrac{S}{\Delta t} = \dfrac{\omega A}{\pi}$

Tốc độ trung bình trong cả quá trình dao động điều hòa là: $v_{dh} = \dfrac{S}{T} = 2\dfrac{\omega A}{\pi}$

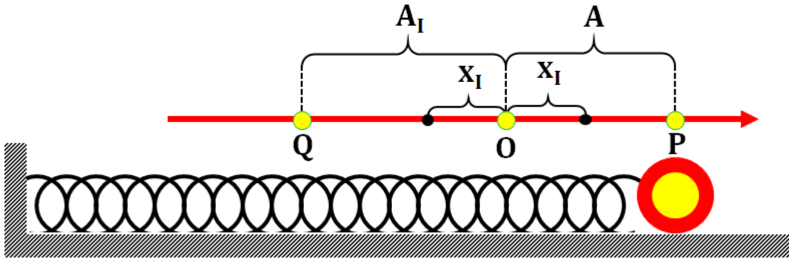
1.4.6 Bài toán tìm vận tốc dao động cực đại trong dao động tắt dần

Phương pháp

Bài toán tổng quát: Cho cơ hệ như hình vẽ, lúc đầu giữ vật ở P rồi thả nhẹ thì vật dao động tắt dần. Tìm vị trí vật đạt tốc độ cực đại và giá trị vận tốc cực đại

Cách 1:

Ngay sau khi bắt đầu dao động lực kéo về có độ lớn cực đại ($F_{max} = kA$) lớn hơn lực ma sát trượt ($F_{ms} = \mu mg$) nên hợp lực ($\vec{F_{hl}} = \vec{F_{kv}} - \vec{F_{ms}}$) hướng về O làm cho vật chuyển động nhanh dần về O. Trong quá trình này, độ lớn lực kéo về giảm dần trong khi độ lớn lực ma sát trượt không thay đổi nên độ lớn hợp lực giảm dần. Đến vị trí I, lực kéo về cân bằng với lực ma sát trượt nên và vật đạt tốc độ cực đại tại điểm này.



Ta có: $\begin{cases} kx_I = F_{ms} \Rightarrow x_I = \dfrac{F_{ms}}{k} = \dfrac{\mu mg}{k} \\ \text{Quãng đường đi được } A_I = A - x_I \end{cases}$

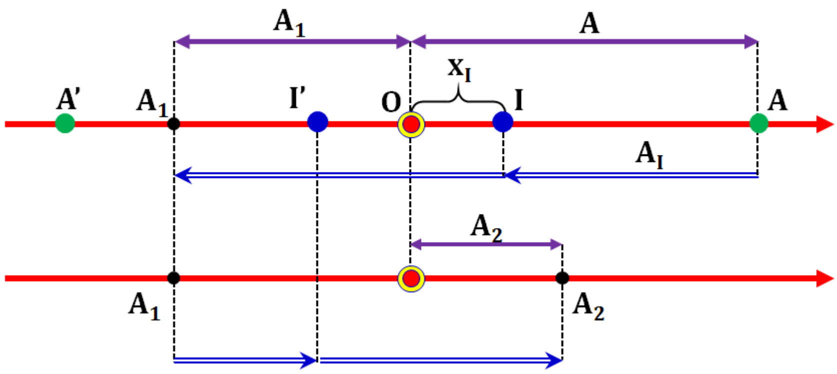
Để tìm tốc độ cực đại tại I, ta áp dụng định luật bảo toàn và chuyển hóa năng lượng. Độ giảm cơ năng đúng bằng công của lực ma sát:

$$W_P - W_Q = F_{ms}A_I$$
$$\Rightarrow \frac{kA^2}{2} - \frac{kx_I^2}{2} - \frac{mv_I^2}{2} = kx_1\left(A - x_1\right) \Leftrightarrow \frac{k}{m}\left(A^2 - 2Ax_I + x_I^2\right) = v_I^2$$
$$\Rightarrow v_I = \sqrt{\frac{k}{m}}\left(A - x_I\right) = \omega A_I$$

"Mẹo" nhớ nhanh, khi vật bắt đầu xuất phát từ P thì có thể xem I là tâm dao động tức thời và biên độ là A_I nên tốc độ cực đại: $v_I = \omega A_I$. Tương tự, khi vật xuất phát từ Q thì I' là tâm dao động tức thời. Để tính x_I ta nhớ: "Độ lớn lực kéo về = Độ lớn lực ma sát trượt".

Cách 2:

Khi không có ma sát, vật dao động điều hòa xung quanh vị trí cân bằng O. Khi có thêm lực ma sát thì có thể xem lực ma sát làm thay đổi vị trí cân bằng.



Xét quá trình chuyển động từ A sang A', lực ma sát có hướng ngược lại nên nó làm dịch vị trí cân bằng đến I sao cho: $x_I = \dfrac{F_{ms}}{k} = \dfrac{\mu mg}{k}$, biên độ $A_I = A - x_I$ nên tốc độ cực đại tại I là $v_I = \omega A_I$. Sau đó nó chuyển động chậm dần và dừng lại ở điểm A_1 đối xứng với A qua I. Do đó, li độ cực đại so với O là $A_1 = A_I - x_I = A\breve{\ }2x_I$.

Quá trình chuyển động từ A_1 sang A thì vị trí cân bằng dịch đến I', biên độ $A_{I'} = A_1 - x_I$ và tốc độ cực đại tại I' là $v_{I'} = \omega A_{I'}$. Sau đó nó chuyển động chậm dần và dừng lại ở điểm A_2 đối xứng với A_1 qua I'. Do đó, li độ cực đại so với O là $A_2 = A_{I'} - x_I = A_1 - 2x_I = A - 2.2x_I$. Khảo sát quá trình tiếp theo hoàn toàn tương tự.

Như vậy, cứ sau mỗi nửa chu kì (sau mỗi lần qua O) biên độ so với O giảm đi một lượng:

$$\Delta \mathrm{A}_{1/2} = 2x_I = \frac{2F_{ms}}{k} = \frac{2\mu mg}{k} \left\{ \begin{array}{l} A_1 = A - \Delta A_{1/2} \\ A_2 = A - 2\Delta A_{1/2} \\ A_3 = A - 3\Delta A_{1/2} \\ \ldots \\ A_n = A - n\Delta A_{1/2} \end{array} \right.$$

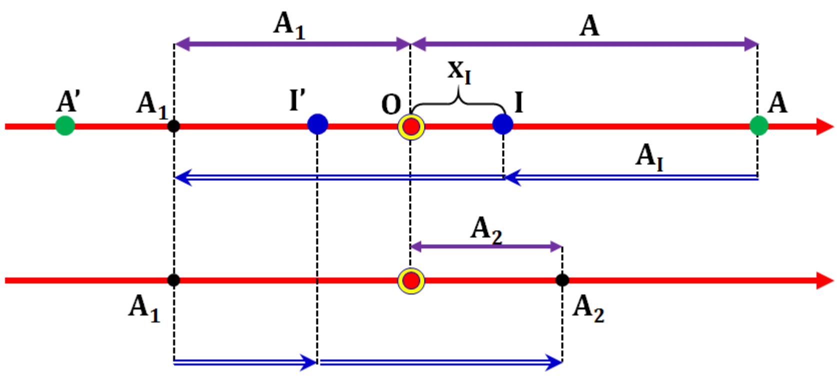
Chú ý: Ta có thể chứng minh khi có lực ma sát thì tâm dao động bị dịch chuyển theo hướng của lực ma sát một đoạn $\frac{F_{ms}}{k}$ như sau:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F} + \vec{F}_{ms}}{m} \Rightarrow \ddot{x} = -\frac{k}{m}\left(x - \frac{F_{ms}}{k}\right)$$

$$\text{Đặt} \left\{ \begin{array}{l} y = x - \dfrac{F_{ms}}{k} \\ \omega^2 = \dfrac{k}{m} \end{array} \right. \Rightarrow \ddot{y} = -\omega^2 y \Rightarrow y = A_I \cos(\omega t + \varphi)$$

1.4.7 Bài toán tìm li độ cực đại so với O sau lần thứ n đi qua O (lần thứ n lò xo không biến dạng)

Phương pháp



Tại I, lực hồi phục cân bằng với lực cản : $kx_I = F_C \Rightarrow x_I = \frac{F_C}{k}$

Gọi A_1 là li độ cực đại sau khi qua O lần 1: $\frac{kA_1^2}{2} = \frac{kA^2}{2} - F_C(A + A_1)$

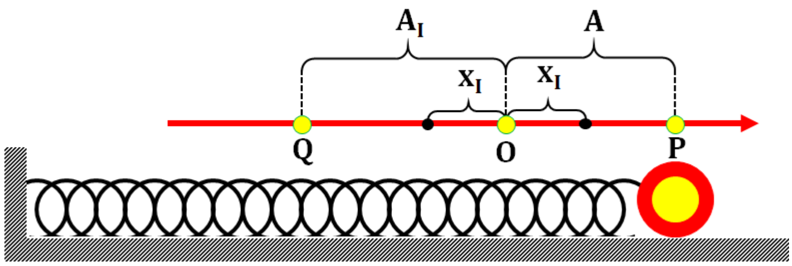
$$(A + A_1)(A - A_1) - \frac{2F_C}{k}(A + A_1) = 0 \Rightarrow (A - A_1) - \frac{2F_C}{k} = 0 \Rightarrow A_1 = A - 2x_I$$

Độ giảm biên độ sau mỗi lần qua O (sau mỗi nửa chu kì): $\Delta A_{1/2} = \dfrac{2F_C}{k} = 2x_I$

Li độ cực đại so với O sau khi qua O lần thứ n: $A_n = A - n\Delta A_{1/2}$

1.4.8 Bài toán tìm quãng đường đi được sau khoảng thời gian nT/2

Phương pháp



Nếu lúc đầu vật ở P thì quãng đường đi được sau thời gian:

$$\begin{cases} t = \dfrac{T}{2} \text{ là } S = A + A_1 \\ t = 2.\dfrac{T}{2} \text{ là } S = A + 2A_1 + A_2 \\ t = 3.\dfrac{T}{3} \text{ là } S = A + 2A_1 + 2A_2 + A_3 \\ \ldots \\ t = n\dfrac{T}{2} \text{ là } S = A + 2A_1 + 2A_2 + \cdots + 2A_{n-1} + A_n \end{cases}$$

Từ đó suy ra:

$$S = (A + A_1) + (A_1 + A_2) + \cdots + (A_{n-1} + A_n) = \boxed{n.2A - n^2\Delta A_{1/2}}$$

1.4.9 Bài toán tìm quãng đường đi được khi gia tốc đổi chiều lần thứ n

Phương pháp

Lúc đầu vật ở P đến I gia tốc đổi chiều lần thứ 1, sau đó đến Q rồi quay lại I' gia tốc đổi chiều lần thứ 2,...

Do đó, quãng đường đi được sau khi gia tốc đổi chiều lần thứ 1, thứ 2, thứ 3,..., thứ n lần lượt là:

$$\begin{cases} S_1 = A - x_I \\ S_2 = A + 2A_1 - x_I \\ S_3 = A + 2A_1 + 2A_2 - x_I \\ \dots \\ S_n = A + 2A_1 + 2A_2 + \dots + 2A_{n-1} - x_I \end{cases} \Rightarrow \boxed{S_n = (2n-1)\,A - \left(n^2 - n + 0,5\right)\Delta A_{1/2}}$$

1.4.10 Bài toán tìm tổng số lần đi qua O (vị trí lò xo không biến dạng) và tìm tọa độ khi vật dừng lại

Phương pháp

Gọi n_0, n, Δt và x_clần lượt là tổng số lần đi qua O, tổng số nửa chu kì thực hiện được, tổng thời gian từ lúc bắt đầu dao động cho đến khi dừng hẳn và khoảng cách từ vị trí dừng lại đến O. Giả sử lúc đầu vật ở vị trí biên dương $+A$ (lò xo dãn cực đại) mà cứ mỗi lần đi qua VTCB biên độ giảm một lượng $\Delta A_{1/2}$ nên muốn xác định n_0, n và Δt ta dựa vào tỉ số: $\dfrac{A}{\Delta A_{1/2}} = p, q$.

1. $n_0 = p$ Vì lúc đầu lò xo dãn nên

$$\begin{cases} \text{Nếu } n_0 \text{ là số nguyên lẻ } \Rightarrow \text{Lần cuối qua O lò xo nén} \\ \text{Nếu } n_0 \text{ là số nguyên chẵn } \Rightarrow \text{Lần cuối qua O lò xo dãn} \end{cases}$$

2. Để tìm n ta xét các trường hợp có thể xảy ra:

   * Nếu $q \leq 5$ thì lần cuối đi qua O vật ở trong đoạn $I'I$ và dừng luôn tại đó nên $n = p$

$$\begin{cases} \Delta t = n\dfrac{T}{2} \\ x_c = \left|A - n\Delta A_{1/2}\right| \end{cases}$$

   * Nếu $q > 5$ thì lần cuối đi qua O vật ở ngoài đoạn $I'I$ và vật chuyển động quay ngược lại thêm thời gian $T/2$ lại rồi mới dừng nên $n = p + 1$.

$$\begin{cases} \Delta t = n\dfrac{T}{2} \\ x_c = \left|A - n\Delta A_{1/2}\right| \end{cases}$$

Chú ý

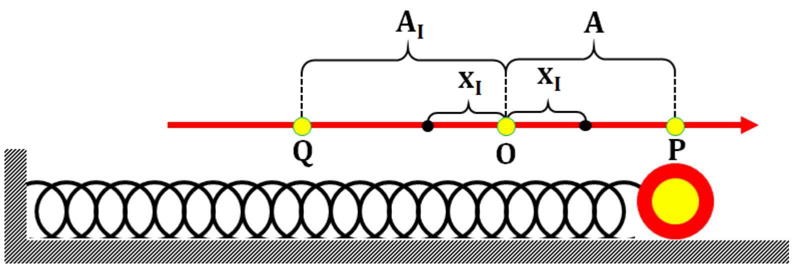
1. Khi dừng lại nếu lò xo dãn thì lực đàn hồi là lực kéo, ngược lại thì lực đàn hồi là lực đẩy và độ lớn lực đàn hồi khi vật dừng lại là: $F = k|x_c|$.

2. Để tìm chính xác tổng quãng được đi được ta dựa vào định lí "Độ giảm cơ năng đúng bằng công của lực ma sát":

$$\frac{kA^2}{2} - \frac{kx_c^2}{2} = F_C S \Rightarrow S = \frac{A^2 - x_c^2}{\Delta A_{1/2}}$$

1.4.11 Bài toán tìm tốc độ tại O hoặc tại một điểm nhất định

Phương pháp



Giả sử lúc đầu vật ở P, để tính tốc độ tại O thì có thể làm theo các cách sau

- **Cách 1:** Độ giảm cơ năng đúng bằng công của lực ma sát $W_P - W_O = A_{ms}$ hay

$$\frac{kA^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = F_{ms}A \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{k}{m}\left(A^2 - \frac{2F_{ms}}{k}A\right)} = \omega\sqrt{A^2 - A.\Delta A_{1/2}}$$

- **Cách 2:** Xem I là tâm dao động và biên độ $A_I = A\breve{\ } x_I$ nên tốc độ tại O:

$$v_0 = \omega\sqrt{A_I^2 - x_I^2}$$

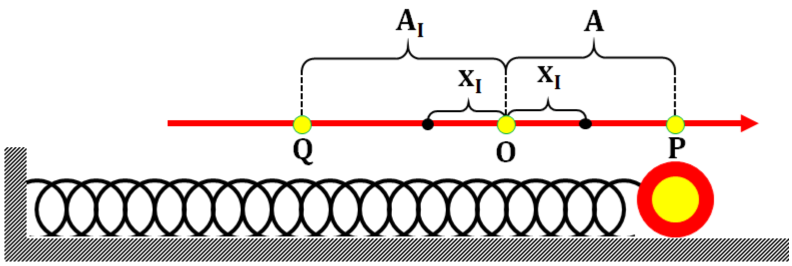
Tương tự, ta sẽ tìm được tốc độ tại các điểm khác

1.4.12 Bài toán liên quan đến con lắc lò xo dao động tắt dần được truyền vận tốc từ vị trí lò xo không biến dạng

Phương pháp

Giả sử lúc đầu vật ở O ta truyền cho nó một vận tốc để đến được tối đa là điểm P. Độ giảm cơ năng đúng bằng công của lực ma sát: $W_O - W_P = A_{ms}$ hay

$$\frac{mv_0^2}{2} - \frac{kA^2}{2} = F_{ms}A \Rightarrow v_0^2 = \frac{k}{m}\left(A^2 + \frac{2F_{ms}}{k}A\right) = \omega^2\left(A^2 + A.\Delta A_{1/2}\right)$$
$$\Rightarrow A^2 + \Delta A_{1/2}.A - \frac{v_0^2}{\omega^2} = 0$$



1.4.13 Bài toán trong dao động tắt dần của con lắc lò xo, tìm tốc độ cực đại sau thời điểm t_0

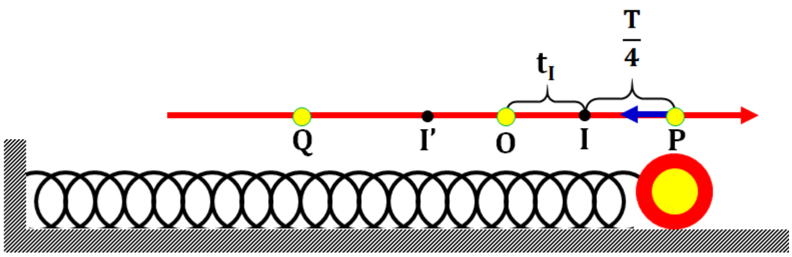
Phương pháp

Giả sử lúc đầu vật ở vị trí biên, muốn tìm tốc độ hoặc tốc độ cực đại sau thời điểm t_0 thì ta phân tích $t_0 = n\frac{T}{2} + \Delta t$ hoặc $t_0 = n\frac{T}{2} + \frac{T}{4} + \Delta t$. Từ đó tìm biên độ so với tâm dao động ở lần cuối đi qua O và tốc độ ở điểm cần tìm.

1.4.14 Tìm thời gian đi từ điểm này đến điểm kia trong dao động tắt dần

Phương pháp

Ta phải xác định được tâm dao động tức thời và biên độ so với tâm dao động.



Chẳng hạn, thời gian chuyển động từ P đến O là: $t = \frac{T}{4} + t_1 = \frac{T}{4} + \frac{1}{\omega}\arcsin\frac{IO}{IP}$

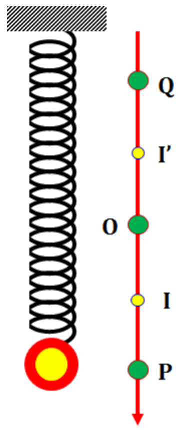
Bình luận: Với phương pháp này ta có thể tính được các khoảng thời gian khác, chẳng hạn thời gian đi từ P đến điểm I' là: $t = \frac{T}{4} + \frac{1}{\omega}\arcsin\frac{II'}{IP}$

1.4.15 Con lắc lò xo dao động tắt dần theo phương thẳng đứng

Phương pháp

Bài toán tổng quát: Cho cơ hệ như hình vẽ, lúc đầu kéo vật ra khỏi vị trí O một đoạn A rồi thả nhẹ thì vật dao động tắt dần. Tìm vị trí vật đạt tốc độ cực đại và giá trị vận tốc cực đại.

Lập luận tương tự như trường hợp vật dao động theo phương ngang.



Nếu vật đi từ P về Q thì tâm dao động là I ngược lại thì tâm dao động là I' sao cho: $x_I = OI = OI' = \frac{F_C}{k}$

Để tìm tốc độ cực đại ta phải xác định lúc đó tâm dao động là I hay I' và biên độ so với tâm rồi áp dụng: $v_{\max} = \omega A_I$ hay $v_{\max} = \omega A_{I'}$.

Độ giảm biên độ so với O sau mỗi lần đi qua O là $\Delta A_{1/2} = 2x_I = \frac{2F_C}{k}$ nên biên độ còn lại sau lần 1, lần 2,..., lần n lần lượt là:

$$\begin{cases} A_1 = A - \Delta A_{1/2} \\ A_2 = A - 2\Delta A_{1/2} \\ A_3 = A - 3\Delta A_{1/2} \\ \dots \\ A_n = A - n\Delta A_{1/2} \end{cases}$$

1.4.16 Bài toán liên quan đến dao động tắt dần của con lắc đơn

Phương pháp

Ta chỉ xét dao động tắt dần chậm và khảo sát gần đúng (xem khi dừng lại vật ở vị trí cân bằng).

$$\begin{cases} S = \dfrac{W}{F_C} \\ \Delta \mathrm{A} = \dfrac{4F_C}{k} \\ N = \dfrac{A}{\Delta A} \\ \Delta t = N.T \end{cases} \text{ Với con lắc đơn ta thay } \left[\begin{array}{l} k = m\omega^2 = \dfrac{mg}{l} \\ A = l\alpha_{\max} \\ W = \dfrac{m\omega^2 A^2}{2} = \dfrac{mgA^2}{2} = \dfrac{mgl}{2}\alpha^2_{\max} \\ T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}} \end{array} \right.$$

Chú ý

1. Biên độ dao động còn lại sau n chu kì: $A_n = A - n.\Delta A \Leftrightarrow \alpha_n = \alpha_{\max} - n.\Delta\alpha$.
2. Nếu cơ năng lúc đầu là $W = \dfrac{m\omega^2 A^2}{2} = \dfrac{mgl}{2}\alpha^2_{\max}$ và con lắc chỉ thực hiện được thời gian Δt (hay được $N = \dfrac{\Delta t}{T}$ dao động) thì:
   - Độ hao hụt cơ năng trung bình sau mỗi chu kì là: $\Delta W = \dfrac{W}{N}$.
   - Công suất hao phí trung bình là $P_{hp} = \dfrac{W}{\Delta t}$ (muốn duy trì dao động thì công suất cần cung cấp đúng bằng công suất hao phí).

   Nếu sau n chu kì biên độ góc giảm từ α_1 xuống α_2 thì công suất hao phí trung bình là: $P_{hp} = \dfrac{W_1 - W_2}{\Delta t} = \dfrac{\dfrac{mgl}{2}\alpha_1^2 - \dfrac{mgl}{2}\alpha_2^2}{n.T}$
3. Năng lượng có ích cần cung cấp sau thời gian t là: $A_{\text{có ích}} = P_{\text{cung cấp}}t$

   Nếu hiệu suất của quá trình cung cấp là H thì năng lượng toàn phần cần cung cấp là: $A_{\text{toàn phần}} = \dfrac{A_{\text{có ích}}}{H} = \dfrac{P_{\text{cung cấp}}t}{H}$

   Nếu dùng nguồn điện một chiều có suất điện động E và điện lượng Q để cung cấp thì năng lượng toàn phần cần cung cấp là: $A_{\text{toàn phần}} = E.Q \Leftrightarrow \dfrac{P_{\text{cung cấp}}t}{H} = E.Q$

1.5 Tổng hợp dao động

★ Nếu một vật tham gia đồng thời hai dao động điều hoà cùng phương, cùng tần số với các phương trình: $x_1 = A_1\cos(\omega t + \varphi_1)$ và $x_2 = A_2\cos(\omega t + \varphi_2)$ thì dao động tổng hợp sẽ là:

$x = x_1 + x_2 = A\cos(\omega t + \varphi)$ với A và φ được xác định bởi:

$$\begin{cases} A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1) \\ \tan\varphi = \dfrac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2} \end{cases}$$

Biên độ và pha ban đầu của dao động tổng hợp phụ thuộc vào biên độ và pha ban đầu của các dao động thành phần.

★ Khi hai dao động thành phần cùng pha ($\varphi_2 - \varphi_1 = 2k\pi$) thì dao động tổng hợp có biên độ cực đại: $A = A_1 + A_2$.

★ Khi hai dao động thành phần ngược pha ($\varphi_2 - \varphi_1 = (2k+1)\pi$) thì dao động tổng hợp có biên độ cực tiểu: $A = |A_1 - A_2|$.

★ Trường hợp tổng quát: $A_1 + A_2 \geq A \geq |A_1 - A_2|$

1.5.1 Bài toán tìm dao động tổng hợp khi biết phương trình các dao động thành phần

Phương pháp

Tổng hợp hai hay nhiều dao động điều hoà cùng phương, cùng tần số là một dao động điều hoà cùng phương, cùng tần số.

Cách 1: Áp dụng trực tiếp công thức tính A và $\tan\varphi$

$$\begin{cases} x_1 = A_1\cos(\omega t + \varphi_1) \\ x_2 = A_2\cos(\omega t + \varphi_2) \end{cases} \Rightarrow x = A\cos(\omega t + \varphi) \begin{cases} A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)} \\ \tan\varphi = \dfrac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2} \end{cases}$$

- Nếu một dạng hàm cos, một dạng hàm sin thì đổi: $\sin(\omega t + \alpha) = \cos\left(\omega t + \alpha - \dfrac{\pi}{2}\right)$
- Nếu hai dao động cùng pha: $\varphi_2 - \varphi_1 = k2\pi \rightarrow A_{\max} = A_1 + A_2$.
- Nếu hai dao động thành phần ngược pha: $\varphi_2 - \varphi_1 = (2k+1)\pi \rightarrow A_{\min} = |A_1 - A_2|$
- Nếu hai dao động thành phần vuông pha: $\varphi_2 - \varphi_1 = (2k+1)\dfrac{\pi}{2} \rightarrow A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$

Cách 2: Cộng các hàm lượng giác

$x = x_1 + x_2 + \cdots$
$x = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega t + \varphi_2) + \cdots$
$x = \cos \omega t \underbrace{(A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2 + \cdots)}_{A \cos \varphi} - \sin \omega t \underbrace{(A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2 + \cdots)}_{A \sin \varphi}$
$\Rightarrow x = A \cos(\omega t + \varphi)$

Cách 2: Cộng số phức

$$x = x_1 + x_2 + \cdots \Leftrightarrow x = A_1 \angle \varphi_1 + A_2 \angle \varphi_2 + \cdots$$

Để thực hiện phép tính về số phức, bấm $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{2}$ màn hình xuất hiện **CMPLX**

- Muốn biểu diễn số phức dạng $A\angle\varphi$, bấm $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{=}$
- Muốn biểu diễn số phức dạng $a + bi$, bấm $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{2}$ $\boxed{4}$ $\boxed{=}$
- Để nhập ký tự $\angle$ bấm: $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{(-)}}$

Khi nhập các số liệu thì phải thống nhất được đơn vị đo góc là độ hay rađian

Kinh nghiệm:

1. Khi cần tổng hợp hai dao động điều hòa có thể dùng một trong ba cách trên. Khi cần tổng hợp ba dao động điều hòa trở lên thì nên dùng cách 2 hoặc cách 3.
2. Phương pháp cộng số phức chỉ áp dụng trong trường hợp các số liệu tường minh hoặc biên độ của chúng có dạng nhân cùng với một số, ví dụ:

$$\begin{cases} A_1 = a\sqrt{2} \\ A_2 = a\sqrt{3} \\ A_3 = a\sqrt{5} \end{cases} \Rightarrow \text{Chọn } a = 1$$

3. Trường hợp chưa biết một đại lượng nào đó thì nên dùng phương pháp vectơ quay hoặc cộng hàm lượng giác. Trường hợp hai dao động thành phần cùng biên độ thì nên dùng phương pháp lượng:

$$x = a\cos(\omega t + \varphi_1) + a\cos(\omega t + \varphi_2) = 2a\cos\left(\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right)\cos\left(\omega t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right)$$

Nếu cho biết phương trình dao động tổng hợp $x = A\cos(\omega t + \varphi)$ thì ta đối chiếu suy ra:
$$\begin{cases} \dfrac{\varphi_2 + \varphi_1}{2} = \varphi \\ \dfrac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} = ? \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi_1 = ? \\ \varphi_2 = ? \end{cases}$$

Chú ý

1. Giả sử ở thời điểm nào đó $x = \dfrac{A}{n}$ và đang tăng (giảm), để tính giá trị x_1, x_2 có thể dùng phương pháp vector quay, giải phương trình lượng giác.

2. Hai thời điểm cùng pha cách nhau khoảng thời gian kT

$$t_2 - t_1 = kT \Rightarrow \Delta\varphi = k2\pi \Rightarrow x_{t_1} = x_{t_2}$$

Hai thời điểm ngược pha cách nhau khoảng thời gian $(2k+1)\dfrac{T}{2}$

$$t_2 - t_1 = (2k+1)\,\frac{T}{2} \Rightarrow \Delta\varphi = (2k+1)\,\pi \Rightarrow x_{t_1} = -x_{t_2}$$

Hai thời điểm ngược pha cách nhau khoảng thời gian $(2k+1)\dfrac{T}{4}$

$$t_2 - t_1 = (2k+1)\,\frac{T}{4} \Rightarrow \Delta\varphi = (2k+1)\,\frac{\pi}{2} \Rightarrow A = \sqrt{x_{t_1}^2 + x_{t_2}^2}$$

1.5.2 Biết trạng thái của dao động tại hai thời điểm, tìm biên độ tổng hợp

Phương pháp

- Dùng vòng tròn lượng giác kép để biểu diễn hai trạng thái.
- Từ vòng tròn lượng giác kép, tìm biên độ các thành phần.
- Tìm biên độ tổng hợp

1.5.3 Bài toán cho biết các đại lượng trong dao động tổng hợp, yêu cầu tìm một số đại lượng trong các phương trình dao động thành phần

Phương pháp

Từ công thức

$$\begin{cases} x = x_1 + x_2 \Rightarrow x_2 = x - x_1 = A\angle\varphi - A_1\angle\varphi_1 \\ x = x_1 + x_2 + x_3 \Rightarrow x_3 = x - x_1 - x_2 = A\angle\varphi - A_1\angle\varphi_1 - A_2\angle\varphi_2 \end{cases}$$

Để tính biên độ thành phần ta dựa vào hệ thức:

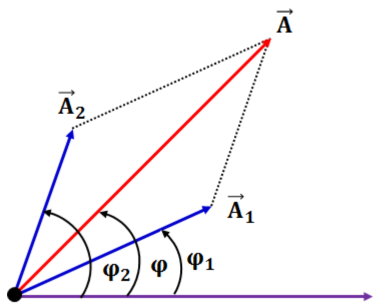
$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1) \begin{cases} v_{\max} = \omega A \\ a_{\max} = \omega^2 A \\ W = \dfrac{m\omega^2 A^2}{2} \end{cases}$$

1.5.4 Bài toán liên qua đến độ lệch pha

Phương pháp

Ta dựa vào hệ thức vector:

$$\begin{cases} \vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2 \\ \vec{A}_1 = \vec{A} - \vec{A}_2 \\ \vec{A}_2 = \vec{A} - \vec{A}_1 \end{cases}$$



và phương vô hướng hai vế:

$$\begin{cases} \vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2 \Rightarrow A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1) \\ \vec{A}_1 = \vec{A} - \vec{A}_2 \Rightarrow A_1^2 = A^2 + A_2^2 + 2AA_2\cos(\varphi - \varphi_2) \\ \vec{A}_2 = \vec{A} - \vec{A}_1 \Rightarrow A_2^2 = A^2 + A_1^2 + 2AA_2\cos(\varphi - \varphi_1) \end{cases}$$

1.5.5 Cực trị biên độ thành phần

Phương pháp

Ta viết lại hệ thức:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1) \Rightarrow \begin{cases} A^2 = (A_2 - xA_1)^2 + yA_1^2 \Rightarrow A_1 = \max \\ A^2 = (A_1 - xA_2)^2 + yA_2^2 \Rightarrow A_2 = \max \end{cases}$$

Ví dụ 1 : Hai dao động cùng phương lần lượt có phương trình $x_1 = A_1\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$ (cm) và $x_2 = A_2\cos\left(\pi t - \frac{\pi}{2}\right)$ (cm) . Dao động tổng hợp của hai dao động này có phương trình $x = A\cos(\omega t + \varphi)$ (cm) . Thay đổi A_1 cho đến khi biên độ A đạt giá trị cực tiểu thì φ bằng

A. $-\frac{\pi}{6}$. **B.** $-\frac{\pi}{3}$. **C.** π. **D.** 0.

Hướng dẫn

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = A_1^2 + 6^2 - 6A_1 = \underbrace{(A_1 - 3)^2}_{0} + 27 \Rightarrow A_1 = 3 \text{ (cm)}$$

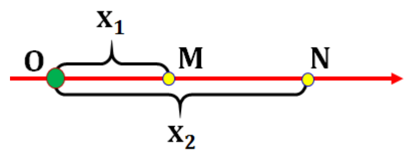
Phương pháp số phức:

$$\begin{aligned} &x = x_1 + x_2 = A_1\angle\varphi_1 + A_2\angle\varphi_2 \\ &\Rightarrow 3\angle\frac{\pi}{6} + 6\angle\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 3\sqrt{2}\angle\left(-\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow B \end{aligned}$$

1.5.6 Khoảng cách giữa hai vật

Phương pháp

Về mặt toán học, thực chất của tổng hợp các dao động điều hoà là cộng các hàm sin, hàm cos (cộng các véc tơ hay cộng các số phức). Vì $-\sin(\omega t + \varphi) = \sin(\omega t + \varphi + \pi)$ và $-\cos(\omega t + \varphi) = \cos(\omega t + \varphi + \pi)$ nên trừ các hàm sin, cos có thể xem như đó là "biến tướng" của tổng hợp dao động.



Giả sử hai chất điểm M, N dao động điều hòa trên cùng một trục Ox cùng vị trí cân bằng O và cùng tần số với phương trình lần lượt: $\begin{cases} x_1 = A_1\cos(\omega t + \varphi_1) \\ x_2 = A_2\cos(\omega t + \varphi_2) \end{cases}$

Tổng đại số $\overline{OM} + \overline{ON}$ là:

$$\begin{cases} x = x_1 + x_2 = A_1\cos(\omega t + \varphi_1) + A_2\cos(\omega t + \varphi_2) \\ x = A_1\angle\varphi_1 + A_2\angle\varphi_2 = A\angle\varphi \Rightarrow |x_{\max}| = A \end{cases}$$

Khoảng cách đại số $\overline{MN}$ là:

$$\begin{cases} \Delta x = x_2 - x_1 ={}_2\cos(\omega t + \varphi_2) - A_1\cos(\omega t + \varphi_1) \\ \Delta x = A_2\angle\varphi_2 - A_1\angle\varphi_1 = b\angle\varphi \Rightarrow |\Delta x_{\max}| = b \end{cases}$$

Chú ý: Khoảng cách MN cực tiểu bằng 0 khi $\sin\left(\omega t + \frac{\varphi}{2}\right) = 0$ và cực đại bằng $\left|2A\sin\frac{\varphi}{2}\right|$ khi $\sin\left(\omega t + \frac{\varphi}{2}\right) = \pm 1$ nên $0 \leq MN \leq \left|2A\sin\frac{\varphi}{2}\right|$

1.5.7 Bài toán tìm thời điểm lần thứ n để hai vật cách nhau một khoảng b

Phương pháp

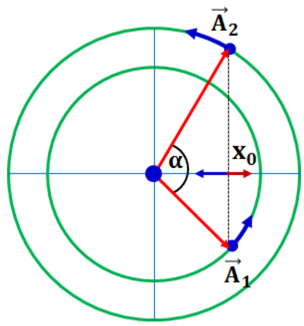
Để tìm các thời điểm cách nhau một khoảng b thì hoặc giải phương trình $|\Delta x| = b$ hoặc dùng vòng tròn lượng giác để tìm bốn thời điểm đầu tiên t_1, t_2, t_3, t_4. Các thời điểm khác xác định như sau:

$$n = \frac{\text{Số lần}}{4}\begin{cases} \rightarrow \text{Dư 1 } t = nT + t_1 \\ \rightarrow \text{Dư 2 } t = nT + t_2 \\ \rightarrow \text{Dư 3 } t = nT + t_3 \\ \rightarrow \text{Dư 4 } t = nT + t_4 \end{cases}$$

1.5.8 Điểm gặp nhau - Hai đường sin cắt nhau

Phương pháp

Một vật tham gia đồng thời hai dao động điều hòa cùng phương với phương trình lần lượt là $x_1 = A_1 \cos\omega t$ và $x_2 = A_2 \cos(\omega t \pm \alpha)$ với $0 \le \alpha \le \pi$. Nếu tại thời điểm t mà $x_1 = x_2 = x_0$ thì



$$|x_0| = \frac{A_1A_2 \sin\alpha}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2\cos\alpha}}$$

Đặc biệt nếu $\alpha = \pm\dfrac{\pi}{2}$ (vuông pha) thì

$$|x_0| = \frac{A_1A_2}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2}} = \frac{A_1A_2}{v_{\max}}\omega$$

1.5.9 Điều kiện thẳng hàng

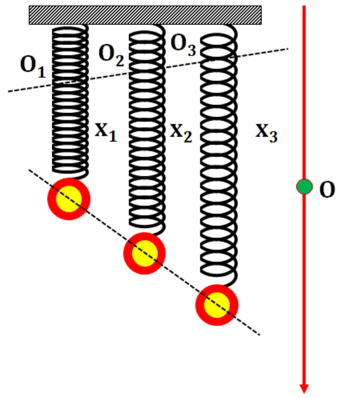
Phương pháp

Ví dụ 2 : Ba con lắc lò xo 1, 2, 3 đặt thẳng đứng cách đều nhau theo thứ tự 1, 2, 3. Vị trí cân bằng của ba vật dao động cùng nằm trên một đường thẳng. Chọn trục Ox có phương thẳng đứng, gốc tọa độ ở vị trí cân bằng thì phương trình dao động lần lượt là $x_1 = A_1\cos(20t + \varphi_1)$ cm, $x_2 = 5\cos\left(20t + \dfrac{\pi}{6}\right)$ cm và $x_3 = 10\sqrt{3}\cos\left(20t - \dfrac{\pi}{3}\right)$ cm. Để ba vật dao động của ba con lắc luôn nằm trên một đường thẳng thì

A. $A_1 = 20$ cm, và $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$ rad.
B. $A_1 = 20$ cm, và $\varphi_1 = \frac{\pi}{4}$ rad.
C. $A_1 = 20\sqrt{3}$ cm, và $\varphi_1 = \frac{\pi}{4}$ rad.
D. $A_1 = 20\sqrt{3}$ cm, và $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$ rad.

Hướng dẫn

Vì vật (2) cách đều vật (1) và (3) (x_2 là đường trung bình của hình thang) nên ta có:



$$x_2 = \frac{x_1 + x_3}{2} \Rightarrow x_1 = 2x_2 - x_3$$
$$x_1 = 10\cos\left(20t + \frac{\pi}{6}\right) - 10\sqrt{3}\cos\left(20t - \frac{\pi}{3}\right)$$

Dùng máy tính, ta được:

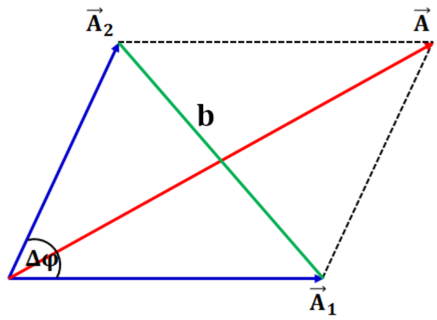
$x_1 = 20\cos\left(20t + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow$ Chọn A

Bình luận: Bài toán này cũng là một kiểu biến tướng của tổng hợp dao động. Khi cho hai trong 3 dao động x_1, x_2 và x_3 tìm được dao động còn lại.

1.5.10 Phân biệt tổng và hiệu hai dao động

Phương pháp

Ta xét hai chất điểm dao động điều hòa trong 2 đường thẳng song song hoặc trong hai mặt phẳng song song có cùng vị trí cân bằng là ở gốc tọa độ. Nếu hai dao động điều hòa lệch pha nhau $\Delta\varphi$: $x_1 = A_1\cos\omega t$ và $x_2 = A_2\cos(\omega t + \Delta\varphi)$ thì tổng li độ $x = x_2 + x_1 = A_2\cos(\omega t + \Delta\varphi) + A_1\cos\omega t$ và hiệu li độ $\Delta x = x_2 - x_1 = A_2\cos(\omega t + \Delta\varphi) + A_1\cos(\omega t + \pi)$.



Gọi A và b lần lượt là biên độ dao động tổng hợp và khoảng cách cực đại giữa hai chất điểm thì:

$$\begin{cases} A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\Delta\varphi \\ b^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\Delta\varphi + \pi) \end{cases}$$

(trên hình vẽ A và b là hai đường chéo của hìnhbình hành!). Khi biết một số đại lượng trong số các đại lượng A, b, A_1, A_2 và $\Delta\varphi$ thì sẽ tính được đại lượng còn lại.

Quy trình giải nhanh:

1. Khi cho biết biên độ dao động tổng hợp của hai chất điểm dao động là A thì độ lệch pha giữa hai dao động thành phần là: $\cos\Delta\varphi = \dfrac{A^2 - A_1^2 - A_2^2}{2A_1A_2}$
2. Khi cho biết khoảng cách cực đại giữa hai chất điểm là b thì độ lệch pha giữa hai dao động thành phần là: $\cos\Delta\varphi = \dfrac{A_1^2 + A_2^2 - b^2}{2A_1A_2}$

   Nếu $\Delta\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ (hai dao động vuông pha) thì $b = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} = A$

   Nếu $\Delta\varphi > \dfrac{\pi}{2}$ thì $b > \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$ và $b > A$.

   Nếu $\Delta\varphi < \dfrac{\pi}{2}$ thì $b < \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$ và $b < A$.

1.5.11 Biết khoảng cách lớn nhất, xác định quan hệ trạng thái

Phương pháp

Ví dụ 1 : Hai con lắc lò xo giống hệt nhau dao động điều hòa trên mặt phẳng nằm ngang, dọc theo hai đường thẳng song song cạnh nhau và song song với trục Ox. Biên độ của con lắc 1 là $A_1 = 4$ cm, con lắc 2 là $A_2 = 4\sqrt{3}$ cm. Con lắc 2 dao động sớm pha hơn con lắc 1 và trong quá trình dao động khoảng cách lớn nhất giữa hai vật dọc theo trục Ox là 4 cm. Khi động năng của con lắc 1 cực đại thì động năng con lắc thứ 2 bằng

A. 1/4 giá trị cực đại. **B.** 3/4 giá trị cực đại.

C. 2/3 giá trị cực đại. **D.** 1/2 giá trị cực đại.

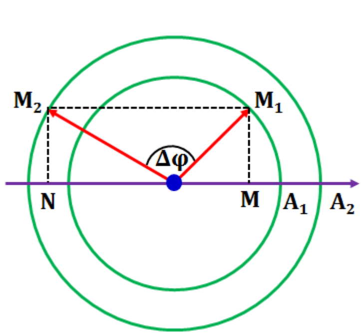
Hướng dẫn

Cách 1

Khoảng cách giữa hai chất điểm lớn nhất khi $M_1M_2 \parallel MN$ và tứ giác MM_1M_2N là hình chữ nhật

$$\Rightarrow \cos\Delta\varphi = \frac{(OM_1)^2 + (OM_2)^2 - (M_1M_2)^2}{2.OM_1.OM_2} = \frac{4^2 + \left(4\sqrt{3}\right)^2 - 4^2}{2.4.\left(4\sqrt{3}\right)} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \Delta\varphi = \frac{\pi}{6}$$

Ta chọn: $\begin{cases} x_1 = \sin\omega t \\ x_2 = 4\sqrt{3}\sin\left(\omega t + \dfrac{\pi}{6}\right) \end{cases}$



Chọn $t = 0$ thì $x_1 = 0$ và $W_{d1} = \max$, còn $x_2 = \dfrac{A_2}{2}$ nên thế năng con lắc 2 bằng 1/4 cơ năng của nó và động năng bằng 3/4 cơ năng của nó ⇒ Chọn B.

Cách 2 Áp dụng công thức: $\cos\Delta\varphi = \dfrac{A_1^2 + A_2^2 - b^2}{2A_1A_2}$

$$\Rightarrow \cos\Delta\varphi = \frac{4^2 + \left(4\sqrt{3}\right)^2 - 4^2}{2.4.\left(4\sqrt{3}\right)} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \Delta\varphi = \frac{\pi}{6}$$

Ta chọn: $\begin{cases} x_1 = \sin\omega t \\ x_2 = 4\sqrt{3}\sin\left(\omega t + \dfrac{\pi}{6}\right) \end{cases}$

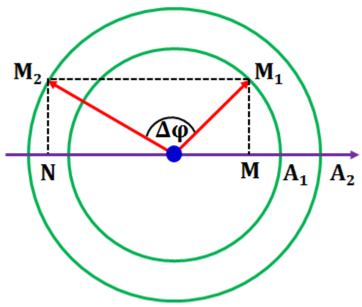
Chọn $t = 0$ thì $x_1 = 0$ và $W_{d1} = \max$, còn $x_2 = \dfrac{A_2}{2}$ nên thế năng con lắc 2 bằng 1/4 cơ năng của nó và động năng bằng 3/4 cơ năng của nó ⇒ Chọn B.

Ví dụ 2 : Hai chất điểm M và N có cùng khối lượng, dao động điều hòa cùng tần số dọc theo hai đường thẳng song song kề nhau và song song với trục tọa độ Ox. Vị trí cân bằng của M và của N đều ở trên một đường thẳng qua gốc tọa độ và vuông góc với Ox. Biên độ của M là 6 cm, của N là 8 cm. Trong quá trình dao động, khoảng cách lớn nhất giữa M và N theo phương Ox là 10 cm. Mốc thế năng tại vị trí cân bằng. Ở thời điểm mà M có động năng bằng thế năng, tỉ số động năng của M và động năng của N là

A. 4/3. **B.** 3/4. **C.** 9/16. **D.** 16/9.

Hướng dẫn

Cách 1



Khoảng cách giữa hai chất điểm lớn nhất khi $M_1M_2 \parallel MN$ và tứ giác MM_1M_2N là hình chữ nhật

$\Rightarrow \cos\Delta\varphi = \dfrac{(OM_1)^2 + (OM_2)^2 - (M_1M_2)^2}{2.OM_1.OM_2} = 0 \Rightarrow \Delta\varphi = \dfrac{\pi}{2}$

$$W_{tM} = W_{dM} = \frac{W_M}{2} \Rightarrow OM = \frac{A_1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha_1 = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \alpha_2 = \frac{\pi}{4} \Rightarrow W_{tN} = W_{dN} = \frac{W_N}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{W_{dM}}{W_{dN}} = \frac{W_M}{W_N} = \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 = \frac{9}{16} \Rightarrow \text{Chọn C}$$

Cách 2:

Khoảng cách giữa hai chất điểm ở thời điểm bất kì:

$$\underbrace{6\cos(\omega t+\varphi_1)}_{x_M}-\underbrace{8\cos(\omega t+\varphi_2)}_{x_N}=\underbrace{10\cos(\omega t+\varphi)}_{\Delta x}$$

Vì $6^2+8^2=10^2$ nên x_M vuông pha x_N. Do đó: $\dfrac{x_M^2}{A_1^2}+\dfrac{x_N^2}{A_2^2}=1$

Khi $W_{tM}=W_{dM}=\dfrac{W_M}{2}=\dfrac{m\omega^2A_1^2}{4}$ thì $x_M=\pm A_1\sqrt{2}$. Từ đó suy ra: $x_N=\pm A_2\sqrt{2}$ hay $W_{tN}=W_{dN}=\dfrac{W_N}{2}=\dfrac{m\omega^2A_2^2}{4}$.

Tỉ số động năng của M và động năng của N:

$\dfrac{W_{dM}}{W_{dN}}=\dfrac{W_M}{W_N}=\left(\dfrac{A_1}{A_2}\right)^2=\dfrac{9}{16}\Rightarrow$ Chọn C

1.5.12 Kĩ thuật đạo hàm làm xuất hiện quan hệ mới

Phương pháp

$$ax_1^2+bx_2^2=c\Rightarrow\begin{cases}ax_1^2+bx_2^2=c\\2ax_1x_1'+2bx_2x_2'=0\Rightarrow 2ax_1v_1+2bx_2v_2=0\end{cases}\xrightarrow{\text{cho } x_1,v_1}\begin{cases}|x_2|=?\\|v_2|=?\end{cases}$$

Ví dụ 1 : Ba chất điểm dao động điều hòa, cùng phương, cùng biên độ A, cùng vị trí cân bằng là gốc tọa độ nhưng tần số khác nhau. Biết rằng, tại mọi thời điểm li độ và vận tốc của các chất điểm liên hệ với nhau bằng biểu thức $\dfrac{x_1}{v_1}+\dfrac{x_2}{v_2}=\dfrac{x_3}{v_3}$. Tại thời điểm t, chất điểm 3 cách vị trí cân bằng là 3 cm thì đúng lúc này, hai chất điểm còn lại nằm đối xứng nhau qua gốc tọa độ và chúng cách nhau 4 cm. Giá trị A **gần giá trị nào nhất** sau đây?

A. 3,2 cm. **B.** 3,5 cm. **C.** 4,5 cm. **D.** 5,4 cm.

Hướng dẫn

Đạo hàm theo thời gian hai vế hệ thức $\dfrac{x_1}{v_1}+\dfrac{x_2}{v_2}=\dfrac{x_3}{v_3}$ ta được

$$\frac{x_1'v_1-x_1v_1'}{v_1^2}+\frac{x_2'v_2-x_2v_2'}{v_2^2}=\frac{x_3'v_3-x_3v_3'}{v_3^2}$$

Thay: $\begin{cases}x'v=v^2=\omega^2\left(A^2-x^2\right)\\xv'=x.a=-\omega^2x^2\end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{\omega_1^2\left(A^2-x_1^2\right)+\omega_1^2x_1^2}{\omega_1^2\left(A-x_1^2\right)}+\frac{\omega_2^2\left(A^2-x_2^2\right)+\omega_2^2x_2^2}{\omega_2^2\left(A-x_2^2\right)}=\frac{\omega_3^2\left(A^2-x_3^2\right)+\omega_3^2x_3^2}{\omega_3^2\left(A-x_3^2\right)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{A-x_1^2}+\frac{1}{A-x_2^2}=\frac{1}{A-x_3^2}$$

với $\begin{cases} x_1^2=x_2^2=2^2 \\ x_3^2=3^2 \end{cases} \Rightarrow A=\sqrt{14}=3,74\,\text{cm}$

1.5.13 Biết tọa độ gặp nhau, xác định độ lệch pha

Phương pháp

Ta xét hai chất điểm dao động điều hoà dọc theo hai đường thẳng cùng song song với trục Ox, cạnh nhau, cùng tần số và vị trí cân bằng ở gốc tọa độ.

- Khi hai chất điểm gặp nhau ở tọa độ x_0, chúng chuyển động ngược chiều nhau thì:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_1=A_1\cos\left(\omega t+\varphi_1\right)=x_0 \\ v_1=-\omega A_1\sin\left(\omega t+\varphi_1\right)>0 \end{cases} \Rightarrow \left(\omega t+\varphi_1\right)=? \\ \begin{cases} x_2=A_2\cos\left(\omega t+\varphi_2\right)=x_0 \\ v_2=-\omega A_2\sin\left(\omega t+\varphi_2\right)<0 \end{cases} \Rightarrow \left(\omega t+\varphi_2\right)=? \end{array}\right. \Rightarrow \Delta\varphi=\left|\left(\omega t+\varphi_2\right)-\left(\omega t+\varphi_1\right)\right|=?$$

hoặc

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_1=A_1\cos\left(\omega t+\varphi_1\right)=x_0 \\ v_1=-\omega A_1\sin\left(\omega t+\varphi_1\right)<0 \end{cases} \Rightarrow \left(\omega t+\varphi_1\right)=? \\ \begin{cases} x_2=A_2\cos\left(\omega t+\varphi_2\right)=x_0 \\ v_2=-\omega A_2\sin\left(\omega t+\varphi_2\right)>0 \end{cases} \Rightarrow \left(\omega t+\varphi_2\right)=? \end{array}\right. \Rightarrow \Delta\varphi=\left|\left(\omega t+\varphi_2\right)-\left(\omega t+\varphi_1\right)\right|=?$$

- Khi hai chất điểm gặp nhau ở tọa độ x_0, chúng chuyển động cùng chiều dương thì

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_1=A_1\cos\left(\omega t+\varphi_1\right)=x_0 \\ v_1=-\omega A_1\sin\left(\omega t+\varphi_1\right)>0 \end{cases} \Rightarrow \left(\omega t+\varphi_1\right)=? \\ \begin{cases} x_2=A_2\cos\left(\omega t+\varphi_2\right)=x_0 \\ v_2=-\omega A_2\sin\left(\omega t+\varphi_2\right)>0 \end{cases} \Rightarrow \left(\omega t+\varphi_2\right)=? \end{array}\right. \Rightarrow \Delta\varphi=\left|\left(\omega t+\varphi_2\right)-\left(\omega t+\varphi_1\right)\right|=?$$

- Khi hai chất điểm gặp nhau ở tọa độ x_0, chúng chuyển động cùng chiều âm thì

$$\left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x_1 = A_1\cos(\omega t+\varphi_1) = x_0 \\ v_1 = -\omega A_1 \sin(\omega t+\varphi_1) < 0 \end{array}\right. \Rightarrow (\omega t+\varphi_1) = ? \\ \left\{\begin{array}{l} x_2 = A_2\cos(\omega t+\varphi_2) = x_0 \\ v_2 = -\omega A_2 \sin(\omega t+\varphi_2) < 0 \end{array}\right. \Rightarrow (\omega t+\varphi_2) = ? \end{array}\right. \Rightarrow \Delta\varphi = |(\omega t+\varphi_2)-(\omega t+\varphi_1)| = ?$$

Ví dụ 1 : Hai chất điểm dao động điều hoà dọc theo hai đường thẳng cùng song song với trục Ox, cạnh nhau, cùng tần số và biên độ của chất điểm thứ nhất là $\dfrac{A}{\sqrt{3}}$ còn của chất điểm thứ hai là A. Vị trí cân bằng của chúng xem như trùng nhau ở gốc tọa độ. Khi hai chất điểm gặp nhau ở tọa độ $\dfrac{A}{2}$, chúng chuyển động ngược chiều nhau. Hiệu pha của hai dao động này có thể là giá trị nào sau đây:

A. $\dfrac{2\pi}{3}$. **B.** $\dfrac{\pi}{3}$. **C.** π. **D.** $\dfrac{\pi}{2}$.

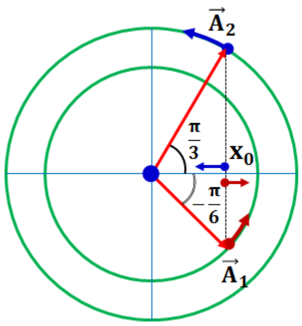
Hướng dẫn

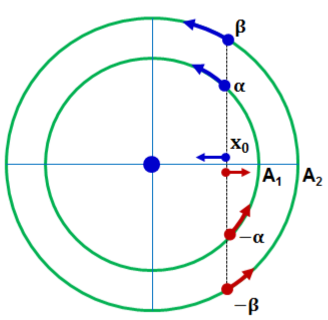
Cách 1

$$\left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{A}{\sqrt{3}}\cos(\omega t+\varphi_1) = \dfrac{A}{2} \\ v_1 = -\dfrac{\omega A}{\sqrt{3}} \sin(\omega t+\varphi_1) > 0 \end{array}\right. \Rightarrow (\omega t+\varphi_1) = -\dfrac{\pi}{6} \\ \left\{\begin{array}{l} x_2 = A\cos(\omega t+\varphi_2) = \dfrac{A}{2} \\ v_2 = -\omega A \sin(\omega t+\varphi_2) < 0 \end{array}\right. \Rightarrow (\omega t+\varphi_2) = \dfrac{\pi}{3} \end{array}\right.$$

$\Rightarrow \Delta\varphi = (\omega t+\varphi_2)-(\omega t+\varphi_1) = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow$ Chọn D

Cách 2: Dùng vòng tròn lượng giác: $\Delta\varphi = \dfrac{\pi}{3} - \left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow$ Chọn D





Chú ý: Cách 2 được gọi là phương pháp dùng vòng tròn lượng giác kép

- Ta vẽ hai vòng tròn đồng tâm với bán kính lần lượt bằng biên độ của các dao động thành phần (nếu bán kính bằng nhau thì hai đường tròn trùng nhau).

- Tại li độ gặp nhau ta vẽ đường thẳng vuông góc với trục x sẽ cắt mỗi vòng tròn tại hai điểm với $\alpha = \arccos\dfrac{x_0}{A_1}$ và $\beta = \arccos\dfrac{x_0}{A_2}$.
- Nếu khi gặp nhau hai chất điểm chuyển động cùng chiều (một ở nửa trên vòng tròn và một ở nửa dưới) thì độ lệch pha bằng $\Delta\varphi = |\beta + \alpha|$ còn nếu chuyển động cùng chiều (cùng ở nửa trên hoặc cùng ở nửa dưới vòng tròn) thì $\Delta\varphi = |\beta - \alpha|$.

1.5.14 Bài toán tìm các thời điểm trùng phùng với hai con lắc có chu kì khác nhau

Phương pháp

Giả sử hai con lắc bắt đầu dao động từ thời điểm $t = 0$. Sau khoảng thời gian Δt con lắc 1 thực hiện đúng n_1 dao động, con lắc 2 thực hiện đúng n_2 dao động:

$$\Delta t = n_1T_1 = n_2T_2 \Rightarrow \frac{n_1}{n_2} = \text{ Phân số tối giản } = \frac{a}{b} \Rightarrow \begin{cases} n_1 = a.n \\ n_2 = b.n \end{cases}$$
$$\Rightarrow \Delta t = anT_1 = bnT_2,\ \Delta t_{\min} = aT_1 = bT_2 \text{ khi } n = 1$$

1.5.15 Bài toán tìm các thời điểm hai chất điểm gặp nhau

Phương pháp

Hai dao động điều hòa cùng phương Ox cùng biên độ và cùng vị trí cân bằng O với phương trình lần lượt là: $x_1 = A\cos(\omega_1 t + \varphi_1)$, $x_2 = A\cos(\omega_2 t + \varphi_1)$. Để tìm các thời điểm gặp nhau có thể: giải phương trình $x_1 = x_2$ hoặc dùng vòng tròn lượng giác.

Khi giải phương trình $x_1 = x_2$ ta được hai họ nghiệm:

$$\left[\begin{array}{l} (\omega_2 t + \varphi_2) + (\omega_1 t + \varphi_1) = k.2\pi \\ (\omega_2 t + \varphi_2) - (\omega_1 t + \varphi_1) = l.2\pi \end{array}\right. \quad \Big(\text{Nếu } \omega_2 > \omega_1\Big)$$

hoặc

$$\left[\begin{array}{l} (\omega_1 t + \varphi_1) + (\omega_2 t + \varphi_2) = k.2\pi \\ (\omega_1 t + \varphi_1) - (\omega_2 t + \varphi_2) = l.2\pi \end{array}\right. \quad \Big(\text{Nếu } \omega_1 > \omega_2\Big)$$

Trong đó, k và l là các số nguyên sao cho $t > 0$. Thời điểm lần đầu tiên ứng với giá trị $t > 0$ và nhỏ nhất (thông thường ứng với k, $l = 0$ hoặc 1!)

Chú ý

1. Nếu $\varphi_1 = \varphi_2 = \alpha$ với $|\alpha < \pi|$ thì lần đầu tiên là ứng với $(\omega_1 t + \varphi_1) + (\omega_2 t + \varphi_2) = 0$

$$\Rightarrow t = \frac{2|\alpha|}{\omega_2 + \omega_1}\begin{cases} \text{Xuất phát cùng chiều tại } x = 0 \text{ thì } |\alpha| = \dfrac{\pi}{2} \\ \text{Xuất phát cùng chiều tại } x = \pm\dfrac{A}{2} \text{ thì } |\alpha| = \dfrac{\pi}{3} \\ \text{Xuất phát cùng chiều tại } x = \pm\dfrac{A}{\sqrt{2}} \text{ thì } |\alpha| = \dfrac{\pi}{4} \\ \text{Xuất phát cùng chiều tại } x = \pm\dfrac{A\sqrt{3}}{2} \text{ thì } |\alpha| = \dfrac{\pi}{6} \end{cases}$$

2. Nếu $(\omega_2 + \omega_1)$ là bội số của $(\omega_2 - \omega_1)$ hoặc ω_2 hoặc $\omega 1$ thì có thể xảy ra hai họ nghiệm nhập thành một họ nghiệm.

3. Giả sử ở thời điểm t_0, hai con lắc có chu kì bằng nhau gặp nhau ở li độ x_1, sau nửa chu kì thì li độ của chúng đều đổi dấu, tức là sẽ gặp nhau ở li độ $-x_1$. Do đó:

   Khoảng thời gian hai lần liên tiếp hai con lắc gặp nhau là $\dfrac{T}{2}$

   Khoảng thời gian n lần liên tiếp hai con lắc gặp nhau là $\Delta t = (n-1)\dfrac{T}{2}$

1.5.16 thời gian trùng phùng của hai con lắc có chu kì xấp xỉ nhau

Phương pháp

Hai con lắc có chu kì xấp xỉ nhau T_1 và T_2 (giả sử $T_2 < T_1$) bắt đầu dao động từ một thời điểm $t = 0$, sau khi con lắc thứ hai thực hiện một dao động thì con lắc thứ nhất còn "1 chút" nữa mới được một dao động. Sẽ tồn tại một khoảng thời gian Δt để con lắc thứ hai hơn con lắc thứ nhất đúng một dao động:

$$\frac{\Delta t}{T_2} - \frac{\Delta t}{T_1} = 1 \Leftrightarrow \frac{\Delta t}{T_{\text{bé}}} - \frac{\Delta t}{T_{\text{lớn}}} = 1 \Rightarrow \Delta t = \frac{T_{\text{lớn}}.T_{\text{bé}}}{T_{\text{lớn}} - T_{\text{bé}}}$$